راهنمای حل

معادلات دیفرانسیل

www.mulduz.ove.ir

تألیف:

دکتر مسعود نیکوکار

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)

فهرست مطالب

فصل اول

مجموعه مسائل فصل اول ۹

جواب مجموعه مسائل فصل اول ۱۱

مسائل تکمیلی فصل اول ۱۴

فصل دوم

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

مجموعه مسائل معادلات تفکیک‌پذیر ۱.۲ .... ۱۶

جواب مجموعه مسائل ۱.۲ .... ۱۸

مجموعه مسائل معادلات همگن ۲.۲ .... ۲۲

جواب مجموعه مسائل ۲.۲ .... ۲۳

مجموعه مسائل معادلات کامل ۳.۲ .... ۲۹

جواب جواب مجموعه مسائل ۳.۲ .... ۳۱

مجموعه مسائل فاکتور انتگرال ۳.۲ .... ۳۶

جواب مجموعه مسائل ۴.۲ .... ۳۷

مجموعه مسائل معادلات خطی مرتبه اول ۵.۲ .... ۴۵

جواب مجموعه مسائل ۵.۲ .... ۴۷

مجموعه مسائل معادلات مرتبه اول که نسبت به مشتق حل نشده‌اند ۶.۲ .... ۵۵

جواب مجموعه مسایل ۶.۲ .... ۵۶

مجموعه مسائل روش تکرار پیکارد ۷.۲ .... ۶۲

جواب مجموعه ۷.۲ .... ۶۳

مجموعه مسائل دوره‌ای ۸.۲ .... ۷۷

جواب مجموعه مسائل ۸.۲ .... ۶۸

مسائل تکمیلی ۷۷

جواب مسائل تکمیلی ۸۱

فصل سوم

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

مجموعه مسائل ۱.۳ .... ۸۴

جواب مجموعه ۱.۳ .... ۸۵

مجموعه مسائل ۴.۳ .... ۹۳

جواب مجموعه مسائل ۴.۳ .... ۹۴

مجموعه مسائل ۵.۳ .... ۱۰۲

مجموعه مسائل ۵.۳ .... ۱۰۳

مجموعه مسائل ۶.۳ .... ۱۱۲

جواب مجموعه مسائل ۶.۳ .... ۱۱۳

مجموعه مسائل ۷.۳ .... ۱۱۶

جواب مجموعه مسائل ۷.۳ .... ۱۱۷

مجموعه مسائل ۸.۳ .... ۱۲۲

جواب مجموعه مسائل ۸.۳ .... ۱۲۴

مسائل تکمیلی ۱۳۲

جواب مسائل تکمیلی ۱۳۷

فصل چهارم

حل معادلات با استفاده از سری‌ها

مجموعه مسائل ۱.۴ .... ۱۴۰

جواب مجموعه مسائل ۱.۴ .... ۱۴۲

مجموعه مسائل ۲.۴ .... ۱۴۴

جواب مجموعه مسائل ۲.۴ .... ۱۴۵

مجموعه مسائل ۳.۴ .... ۱۵۲

جواب مجموعه مسائل ۳.۴ .... ۱۵۳

مجموعه مسائل ۴.۴ .... ۱۵۷

جواب مجموعه مسائل ۴.۴ .... ۱۵۸

مجموعه مسائل ۵.۴ .... ۱۷۱

جواب مجموعه مسائل ۵.۴ .... ۱۷۲

مجموعه مسائل ۶.۴ .... ۱۷۴

جواب مجموعه مسائل ۶.۴ .... ۱۷۵

مجموعه مسائل ۷.۴ .... ۱۷۸

جواب مجموعه مسائل ۷.۴ .... ۱۸۰
مسائل تکمیلی ۱۸۷
جواب مسائل تکمیلی ۱۹۷

فصل پنجم

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

مجموعه مسائل فصل ۵ .... ۱۹۸
جواب مجموعه مسائل فصل ۵ .... ۲۰۰
مسائل تکمیلی ۲۰۴
جواب مسائل تکمیلی ۲۰۵

فصل ششم

تبدیل لاپلاس

مجموعه مسائل ۱.۶ .... ۲۰۶
جواب مجموعه مسائل ۱.۶ .... ۲۰۸
مجموعه مسائل ۲.۶ .... ۲۱۰
جواب مجموعه مسائل ۲.۶ .... ۲۱۱
مجموعه مسائل ۳.۶ .... ۲۱۴
جواب مجموعه مسائل ۳.۶ .... ۲۱۵
مجموعه مسائل ۴.۶ .... ۲۱۹
جواب مجموعه مسائل ۴.۶ .... ۲۲۱
مجموعه مسائل ۵.۶ .... ۲۲۵
جواب مجموعه مسائل ۵.۶ .... ۲۲۶
مجموعه مسائل ۶.۶ .... ۲۲۹
جواب مجموعه مسائل ۶.۶ .... ۲۳۰
مجموعه مسائل ۷.۶ .... ۲۳۴
جواب مجموعه مسائل ۷.۶ .... ۲۳۵
مجموعه مسائل ۸.۶ .... ۲۳۸
جواب مجموعه مسائل ۸.۶ .... ۲۳۹
مجموعه مسائل ۹.۶ .... ۲۴۱
جواب مجموعه مسائل ۹.۶ .... ۲۴۲
مسائل تکمیلی ۲۴۵
جواب مسائل تکمیلی ۲۵۳
مسائل امتحان ۲۵۵

بسمه‌تعالی

در پی تقاضاهای کتبی و شفاهی شما دانشجویان عزیز، بر آن شدم که حل کلیه مسائل کتاب معادلات دیفرانسیل را به شما تقدیم نمایم.

برای آن دسته از دانشجویان که علاقمند به حل تمرین بیشتری هستند، در هر فصل تمرین‌های حل‌نشده همراه با جواب آورده شده و علاوه بر آن، نکات و مطالب مهم اضافی مربوط به هر فصل در انتهای فصل افزوده شده‌است.

امیدوارم این کتاب نیز همچون کتاب معادلات مورد توجه شما علاقمندان قرار گیرد.

هیچ ادعائی در بی‌عیب و نقص بودن این مجموعه نیست، لذا از دانشجویان عزیز و همکاران گرامی انتظار دارم از نظرات اصلاحی خود، مولف را آگاه سازند.

در خاتمه وظیفه خود می‌دانم که از همکاری‌های بی‌دریغ کلیه کارکنان انتشارات آزاده خصوصاً آقای جعفر بدوستانی مدیریت محترم انتشارات آزاده صمیمانه تشکر نمایم.

مسعود نیکوکار
گروه ریاضی دانشکده ریاضی و کامپیوتر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

درست‌نامه

صفحه	سطر	غلط	درست
۱۸	۴	$x(y-1)$	$x(1-y)$
۵۸	۱	$ydp - pdy$	$pdy - ydp$
۷۷	۴	$-x^2dx = 0$	$-x^2ydx = 0$
۸۸	۴	$+c_1)$	$+c_2)$
۸۸	۵	$c_1 =, c_2 =$	$c_2 =, c_1 =$
۸۸	۷	$t = -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$	$t = -\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}$
۹۴	۱۳	$-1 + 2i$	$1 + 2i$
۹۶	۵	$-3A\cos 3x + 3B\sin 3x$	$-3A\sin 3x + 3B\cos 3x$
۱۰۳	۷	$= -\frac{1}{9}e^x$	$= \frac{1}{9}e^x$
۱۰۷	۱۸	$= (c_1 + c_2x)e^x$	$= c_1e^x + c_2e^{2x}$
۱۱۸	۶	$-\frac{8D}{16}$	$-\frac{8D}{-8}$
۱۲۵	۱۴	$\sec vdv$	$\csc vdv$
۱۲۶	۵	$\frac{2}{c_1\sqrt{c_1y - 1x}}$	$\frac{2}{c_1}\sqrt{c_1y - 1}$
۱۳۳	۱۸	$(1-x)y'$	$(1-x)y' = 0$
۱۶۹	۲	$= c_0x^2$	$= c_0x$
۱۶۹	۳	$= x^2$	$= x$
۱۶۹	۶	$+x_{-3}$	$+x^3$
۱۷۷	۳	$-\frac{77}{x^2}$	$-\frac{72}{x^2}$
۲۳۰	۱۲	$\frac{1}{a}$	$\frac{a}{a}$
۲۴۳	۶	$(s^2 - 4)$	$(s^2 - s)$
۲۵۵	۱۳	$\cot y^{-1}$	$\cot^{-1}$
۲۵۸	۱۸	$e^{4t}\sin t \int_0^t$	$e^{4t}\int_0^t$
۲۶۶	۴	$= \cot$	$= \cos t$

فصل ۱

تعاریف و کلیات

مجموعه مسائل فصل اول

مرتبه معادلات دیفرانسیل زیر را بیان کنید و تحقیق کنید تابع داده شده یک جواب می‌باشد.

۱) $y = ce^{-5x}, \quad y' + 5y = 0$

۲) $y = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x), \quad y'' + 4y' + 5y = 0$

۳) $y = ce^{2x} + \frac{3}{2}, \quad y' - 2y + 3 = 0$

۴) $y = c\ln x, \quad y'x\ln x - y = 0$

۵) $x^2 - xy + y^2 = c^2, \quad (x-2)y' = 2x - y$

۶) $y = x + ce^y, \quad (x - y + 1)y' = 1$

۷) $y = \ln(xy), \quad (xy - x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0$

۸) $y = x\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt, \quad xy' - x\sin x = y$

۹) $y = x\left(\int \frac{e^x}{x}\,dx + c\right), \quad y' = \frac{y}{x} + e^x$

۱۰) $y = e^{x^2}\left(\int e^{-x^2}\,dx + c\right), \quad y' - 2xy = 1$

معادله دیفرانسیل دسته منحنی های زیر را تشکیل دهید.

$11)\ y = c_1e^x + c_2e^{-3x} \quad 12)\ y^2 + \frac{1}{x} = 2 + ce^{-y^2/2}$

$13)\ x^3 = c(x^2 - y^2) \quad 14)\ \ln\frac{x}{y} = 1 + cy$

$15)\ y = (c_1 + c_2x)e^x + c_3$

حل مجموعه مسائل فصل اول

درمسائل ۱_۱۰باقراردادن y ومشتقات آن در معادله دادهشده نشان می دهیم که y در معادله صدق می کند. شمارهای ۱،۳،۴،۵،۶،۸و۹ از مرتبه اول و شمارهای ۲و۷ از مرتبه دوم می باشند.

$1)\ y = ce^{-5x},\ y' = -5ce^{-5x} \Rightarrow y' + 5y = -5ce^{-5x} + 5ce^{-5x} = 0$

$2)\ y = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x),$

$y' = -e^{-2x}((A+2B)\sin x + (2A-B)\cos x),$

$y'' = e^{-2x}((4A+3B)\sin x + (3A-4B)\cos x),$

$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}((4A+3B) - 4(A+2B) + 5B))\sin x$

$+((3A-4B) - 4(2A-B) + 5A)\cos x = 0$

$3)\ y = ce^{2x} + \frac{3}{2},\ y' = 2ce^{2x} \Rightarrow$

$y' - 2y + 3 = 2ce^{2x} - 2\left(ce^{2x} + \frac{3}{2}\right) + 3 = 0$

$4)\ y = c\ln x \quad y' = \frac{c}{x} \Rightarrow y'x\ln x - y = \frac{c}{x}x\ln x - c\ln x = 0$

$5)\ x^2 - xy + y^2 = c^2,\ 2x - y - xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - y = y'(x - 2y)$

$6)\ y = x + ce^y,\ y' = 1 + cy'e^y \Rightarrow y' = \frac{1}{(1 - ce^y)}$

$\Rightarrow (x - y + 1)y' = (x - x - ce^y + 1)\frac{1}{(1 - ce^y)} = 1$

$7)\ y = \ln(xy),\ y' = \frac{y + xy'}{xy} \Rightarrow xyy' = y + xy'$

$\Rightarrow yy' + xy'^2 + xyy'' = y' + y' + xy''$

$\Rightarrow (xy - x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0$

۸) $y = x\int_{0}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt, \quad y' = \int_{0}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt + x\frac{\sin x}{x}$

$$\Rightarrow xy' - x\sin x = x\sin x + x\int_{0}^{x} \frac{\sin t}{t}dt - x\sin x = y$$

۹) $y = x\left(\int \frac{e^x}{x}\,dx + c\right), \quad y' = \left(\int \frac{e^x}{x}\,dx + c\right) + e^x$

$$\Rightarrow y' = \frac{y}{x} + e^x$$

۱۰) $y = e^{x^2}\left(\int e^{-x^2}\,dx + c\right), \quad y' = 2xe^{x^2}\left(\int e^{-x^2}\,dx + c\right) + 1$

$$\Rightarrow y' - 2xy = 1$$

در مسائل ۱۱_۱۵کافیست پارامترها را بین معادله و مشتقات آن حذف کنیم.

۱۱) $\begin{cases} y = c_1e^x + c_2e^{-3x} \\ y' = c_1e^x - 3c_2e^{-3x} \\ y'' = c_1e^x + 9c_2e^{-3x} \end{cases} \Rightarrow y'' + 2y' - 3y = 0$

۱۲) $\begin{cases} y^2 + \frac{1}{x} = 2 + ce^{-y^2/2} \\ 2yy' - \frac{1}{x^2} = -cyy'e^{-y^2/2} \end{cases}$

با تقسیم طرفین رابطه دوم دستگاه بر yy' و جمع آن با رابطه اول دستگاه داریم.

$$xyy'(xy^2 + 1) = 1$$

۱۳) $\begin{cases} x^3 = c(x^2 - y^2) \\ 3x^2 = c(2x - 2yy') \end{cases}$

با تقسیم طرفین دو رابطه دستگاه برهم ومساوی قراردادن حاصل ضرب طرفین با وسطین داریم

$$3y^2 - x^2 = 2xyy'$$

۱۴) $\begin{cases} \ln\frac{x}{y} = 1 + cy \\ \frac{1}{x} - \frac{y'}{y} = cy' \end{cases}$

رابطه اول دستگاه را در y' ضرب و رابطه دوم دستگاه را در y ضرب مکنیم، سپس آنها را از هم کم میکنیم، داریم

$$y'\ln\frac{x}{y} - \frac{y}{x} + y' = y' \Rightarrow y = xy'\ln\frac{x}{y}$$

۱۵) $\begin{cases} y = (c_1 + c_2x)e^x + c_3 \\ y' = (c_1 + c_2 + c_2x)e^x \\ y'' = (c_1 + 2c_2 + c_2x)e^x \\ y''' = (c_1 + 3c_2 + c_2x)e^x \end{cases} \Rightarrow y''' - 2y'' + y' = 0$

مسائل تکمیلی فصل اول

۱) اگر در هر یک از نقاط (x,y) یک منحنی شیب آن سه برابر مجموع مربعات آن نقطه باشد. این شرط را بوسیله معادله دیفرانسیل بیان کنید.

۲) اگر مجموع طول و عرض از مبداء خط مماس بر یک منحنی همواره برابر ۶ باشد. این شرط را بوسیله معادله دیفرانسیل بیان کنید.

۳) معادله دیفرانسیل دسته منحنی های زیر را تشکیل دهید.

$a)\ x^2y^4 + xy^5 = c \qquad b)\ y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$

$c)\ y = c_1e^{2x} + c_2e^{x} + c_3 \qquad d)\ y = c_1e^{3x} + c_2e^{2x} + c_3e^{x}$

$e)\ y = cx^2 + c^2 \qquad f)\ \rho = a(1-\cos\theta)$

۴) معادله دیفرانسیل خطوط مستقیمی که فاصله آنها از مبداء برابر ۱ باشد.

۵) معادله دیفرانسیل دایره‌های موجود دریک صفحه را بنویسید.

۶) مرتبه معادلات دیفرانسیل زیر را بیان کنید و تحقیق کنید تابع داده شده یک جواب می‌باشد.

$a)\ y = c_1\sin x + c_2x \qquad (1 - x\cot x)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

$b)\ y = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + c_3e^{-x} + 2x^2e^{x} \qquad y''' - y'' - y' + y = 8e^{x}$

$c)\ (y-c)^2 = cx \qquad 4xy'^2 + 2xy' = y$

$d)\ y = cx + c^4 \qquad y = xy' + (y')^4$

$e)\ y = a\cos 2x + \sin 2x \qquad y'\cos 2x + 2y\sin 2x = 2$

$f)\ y = \ln\cos(x-a) + b \qquad y'' + y'^2 + 1 = 0$

۷) نشان دهید که توابع $y = c_1\cos x + c_2\sin x$ و $y = c_3\cos(x + c_4)$ جوابهای معادله $y'' + y = 0$ می‌باشند.

جواب مسائل تکمیلی

$1)\ y' = 3(x^2 + y^2)$

$2)\ x(y')^2 - (x + y - 6)y' + y = 0$

$3)\ a)\ 2xy^4 + 4x^2y^3y' + y^5 + 5xy^4y' = 0, \qquad b)\ y'' + 4y = 0$

$c)\ y''' - 3y'' + 2y' = 0, \qquad d)\ y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

$e)\ (y')^2 + 2x^3y' - 4x^2y = 0, \qquad f)\ (1-\cos\theta)\,d\rho = \rho\sin\theta\,d\theta$

$4)\ (xy' - y)^2 = 1 + (y')^2, \qquad 5)\ \left(1 + (y')^2\right)y''' - 3y'(y'')^2 = 0$

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱.۲، مجموعه مسائل معادلات تفکیک پذیر

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

۱) $yx^2\,dy - 2x^2\,dy = y^2\,dx$ ۲) $y' = \dfrac{4xy}{x^2+1}$

۳) $t(y-1)\,dt + y(t+1)\,dy = 0$ ۴) $x^2yy' - e^y = 0$

۵) $y\,dx - x\ln x\,dy = 0,\quad x > 1$ ۶) $\sqrt{1+y^2}\,dx - y(1+x^2)dy = 0$

۷) $\sin x\,dx - 2y\,dy = 0,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ ۸) $\dfrac{dr}{ds} = \dfrac{(1+r)^2}{1-s},\quad r(0) = 1$

۹) $y' = \dfrac{1+y^2}{xy},\quad y(2) = 3$ ۱۰) $\tan t\dfrac{dy}{dt} - y\sec^2 t = 0$

۱۱) $y'\ln x - \dfrac{y}{x} = 0,\quad x > 0$ ۱۲) $xy' = (1-x^2)\cot y$

۱۳) $y'\sin x = y\ln y$ ۱۴) $xy' + (1+y^2)\tan^{-1} y = 0$

۱۵) $e^{y^2}(x^2+2x+1) = -(xy+y)y'$ ۱۶) $y' = x+1+xy^2+y^2$

معادلات زیر را با استفاده از تغییر متغیرهای داده شده حل کنید.

۱۷) $xy^2(xy'+y) = 4,\quad xy = t$

۱۸) $(\ln x + y^3)\,dx - 3xy^2\,dy = 0,\quad \dfrac{y^3}{x} = t$

۱۹) $(xy + 2xy\ln^2 y + y\ln y)\,dx + (2x^2\ln y + x)\,dy = 0,\quad x\ln y = t$

۲۰) $y' = 2x + y$ ۲۱) $y' = \cos(x-y)$ ۲۲) $y' = -2(2x+3y)^2$

حل مجموعه مسائل ۱.۲

۱) $yx^2\,dy - 2x^2\,dy = y^3\,dx \Rightarrow x^2(y-2)\,dy = y^3\,dx \Rightarrow$

$$\frac{(y-2)\,dy}{y^3} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \int \frac{(y-2)}{y^3}\,dy =$$

$$= \int \frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow y^2(cx-1) = x(y-1)$$

۲) $y' = \frac{4xy}{x^2+1} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{4x\,dx}{x^2+1} \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int \frac{4x}{x^2+1}\,dx$

$$\ln y = 2\ln(x^2+1) + \ln c \Rightarrow y = c(x^2+1)^2$$

۳) $t(y-1)\,dt + y(t+1)\,dy = 0 \Rightarrow \frac{t\,dt}{t+1} + \frac{y\,dy}{y-1} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{t+1-1}{t+1}\,dt + \frac{y-1+1}{y-1}\,dy = 0 \Rightarrow t - \ln(t+1) + y$$

$$+\ln(y-1) + \ln c = 0 \Rightarrow t+y = \ln\frac{t+1}{c(y-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{t+1}{y-1} = ce^{t+y}$$

۴) $x^2yy' - e^y = 0 \Rightarrow ye^{-y}\,dy = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \int ye^{-y}\,dy = \int\frac{dx}{x^2}$

$$\Rightarrow -(y+1)e^{-y} = -\frac{1}{x} + c \Rightarrow (y+1)e^{-y} = \frac{1}{x} + c$$

۵) $y\,dx - x\ln x\,dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\ln x}$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln(\ln x) + \ln c \Rightarrow y = c\ln x$$

۶) $\sqrt{1+y^2}\,dx - y(1+x^2)\,dy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{(1+x^2)} - \frac{y\,dy}{1+y^2} = 0$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{(1+x^2)} - \int\frac{y}{1+y^2}\,dy = 0 \Rightarrow \tan^{-1}x - \sqrt{1+y^2} = c$$

۷) $\sin x\,dx - 2y\,dy = 0 \Rightarrow \int \sin x\,dx - \int 2y\,dy = c$

$$\Rightarrow y^2 + \cos x = c \Rightarrow 0 + \cos\frac{\pi}{2} = c \Rightarrow c = 0,\ y^2+\cos x = 0$$

۸) $\frac{dr}{ds} = \frac{(1+r)^2}{1-s} \Rightarrow \frac{dr}{(1+r)^2} = \frac{ds}{1-s}$

$$\Rightarrow \int\frac{dr}{(1+r)^2} = \int\frac{ds}{1-s} \Rightarrow (1+r)^{-1} = \ln(1-s)+c$$

با توجه به شرط اولیه داریم $c = 1/2$ بنابراین $\frac{1}{1+r} = \ln(1-s) + \frac{1}{2}$

۹) $y' = \frac{1+y^2}{xy} \Rightarrow \frac{y\,dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow \int\frac{y\,dy}{1+y^2} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(1+y^2) = 2\ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow 1+y^2 = cx^2,\quad y(2)=3 \Rightarrow c = \frac{5}{2} \Rightarrow 5x^2 - 2y^2 = 2$$

۱۰) $\tan t\frac{dy}{dt} - y\sec^2 t = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} - \frac{\sec^2 t\,dt}{\tan t} = 0$

$$\Rightarrow \ln y = \ln\tan t + \ln c \Rightarrow y = c\tan t$$

۱۱) $y'\ln x - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\ln x}$

$$\Rightarrow \ln y = \ln|\ln x| + \ln c \Rightarrow y = c\ln x$$

۱۲) $xy' = (1-x^2)\cot y \Rightarrow \frac{dy}{\cot y} = \frac{(1-x^2)\,dx}{x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\cot y} = \left(\frac{1}{x} - x\right)dx \Rightarrow \ln|\sec y| = \ln x - \frac{1}{2}x^2 + \ln c$$

$$\Rightarrow \sec y = cxe^{-x^2/2}$$

۱۳) $y'\sin x = y\ln y \Rightarrow \frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x}$

$$\Rightarrow \ln\ln y = \ln\tan\frac{x}{2} + \ln c \Rightarrow \ln y = c\tan\frac{x}{2} \Rightarrow y = e^{c\tan(x/2)}$$

۱۴) $xy' + (1+y^2)\tan^{-1}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{(1+y^2)\tan^{-1}y} + \frac{dx}{x} = 0$

$$\Rightarrow \ln(u+۲) = x + c \Rightarrow u = ce^{x} - ۲ \Rightarrow y = ce^{x} - ۲x - ۲$$

۲۱) $u = x - y \Rightarrow u' = ۱ - y'$

$$y' = \cos(x-y) \Rightarrow ۱ - u' = \cos u$$

$$\Rightarrow \frac{du}{۱-\cos u} = dx \Rightarrow \cot\frac{x-y}{۲} + x + c = ۰$$

۲۲) $u = ۲x + ۳y \Rightarrow u' = ۲ + ۳y'$

$$y' = -۲(۲x+۳y)^{۲} \Rightarrow \frac{u'-۲}{۳} = -۲u^{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{۲-۶u^{۲}} = dx \Rightarrow \frac{۱}{۴\sqrt{۳}}\ln\frac{۱+\sqrt{۳}u}{۱-\sqrt{۳}u} = x + c$$

$$\Rightarrow \frac{۱+\sqrt{۳}(۲x+۳y)}{۱-\sqrt{۳}(۲x+۳y)} = ce^{۴x\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow \ln\tan^{-۱}y + \ln x = \ln c \Rightarrow y = \tan\frac{c}{x}$$

۱۵) $e^{y^{۲}}(x^{۲}+۲x+۱) = -(xy+y)y' \Rightarrow ye^{-y^{۲}}\,dy = -(x+۱)\,dx$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}e^{-y^{۲}} = -\frac{۱}{۲}(x+۱)^{۲} + c \Rightarrow e^{-y^{۲}} = x^{۲} + ۲x + c$$

۱۶) $y' = x + ۱ + xy^{۲} + y^{۲} \Rightarrow \frac{dy}{۱+y^{۲}} = (x+۱)\,dx$

$$\Rightarrow \tan^{-۱}y = \frac{x^{۲}}{۲} + x + c$$

۱۷) $xy^{۲}(xy'+y) = ۴, \quad xy = t, \quad y + xy' = \frac{dt}{dx}$

$$\Rightarrow t\frac{t\,dt}{x\,dx} = ۴ \Rightarrow t^{۲}\,dt = ۴x\,dx$$

$$\Rightarrow t^{۳} = ۶x^{۲} + c \Rightarrow x^{۳}y^{۳} = ۶x^{۲} + c$$

۱۸) $\frac{y^{۳}}{x} = t, \quad \frac{۳y^{۲}x\,dy - y^{۳}\,dx}{x^{۲}} = dt$

$$(\ln x + y^{۳})\,dx - ۳xy^{۲}\,dy = ۰ \Rightarrow \ln x\,dx - x^{۲}\,dt = ۰ \Rightarrow \frac{\ln x}{x^{۲}}\,dx = dt$$

$$\Rightarrow \frac{\ln x}{x} + \frac{۱}{x} = t + c = \frac{y^{۳}}{x} + c \Rightarrow y^{۳} = cx - ۱ - \ln x$$

۱۹) $x\ln y = t \Rightarrow \ln y\,dx + \frac{x}{y}\,dy = dt \Rightarrow y\ln y\,dx + x\,dy = y\,dt$

$$(xy + ۲xy\ln^{۲}y + y\ln y)\,dx + (۲x^{۲}\ln y + x)\,dy = ۰$$

$$\Rightarrow xy\,dx + (۲x\ln y + ۱)(y\ln y\,dx + x\,dy) = ۰$$

$$\Rightarrow x\,dx + (۲t+۱)\,dt = ۰ \Rightarrow x^{۲} + ۲t^{۲} + ۲t = c$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۲x^{۲}\ln^{۲}y + ۲x\ln y = c \Rightarrow ۲x^{۲} + (۲x\ln y + ۱)^{۲} = c$$

۲۰) با انتخاب $u = ۲x + y$ داریم $u' = ۲ + y'$

$$y' = ۲x + y \Rightarrow u' - ۲ = u \Rightarrow \frac{du}{u+۲} = dx$$

مجموعه مسائل معادلات همگن، ۲.۲

معادلات زیر را حل کنید

۱) $y' = \dfrac{2x^2+y^2}{-2xy+3y^2}$ ۲) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{xy}\,dx$

۳) $\left(y^2-2xy\right)\,dx + \left(2xy - x^2\right)\,dy = 0$ ۴) $xy' - y = \sqrt{x^2-y^2}$

۵) $\left(xe^{y/x}+y\right)\,dx - x\,dy = 0$ ۶) $y' = \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

۷) $x\left(y'+e^{y/x}\right) = y$ ۸) $(x^2+xy)y' = x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$

۹) $y' = \dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$ ۱۰) $x\,dy = y\cos\ln\dfrac{y}{x}\,dx$

۱۱) $xy' = y + x\tan\dfrac{y}{x}$ ۱۲) $y'=\dfrac{x-y}{x+3y}$

۱۳) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{5x-y}{2x+2y}$ ۱۴) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y-1}{x+4y+2}$

۱۵) $y'=\dfrac{x-3y+3}{2x-6y+1}$ ۱۶) $(x+y-1)^2\,dy = 2(y+2)^2\,dx$

۱۷) $y' - \tan\dfrac{y-2x}{x+1} = \dfrac{y+2}{x+1}$ ۱۸) $y'\ln\dfrac{y+x}{x+3} = \dfrac{y+x}{x+3} - \ln\dfrac{y+x}{x+3}$

معادلات زیر را با استفاده از تغییر متغیر $y=xv,\quad y'=v+xv'$ حل کنید.

۱۹) $xy' = y + x^2\sec\dfrac{y}{x}$

۲۰) $(x^2+1)y(xy'-y) = x^3$

۲۱) $xy' - y - x^2\tan\dfrac{y}{x} = 0$

معادلات زیر را با استفاده از تغییر متغیر زیر حل کنید.

$$y=t^\alpha,\quad dy = \alpha t^{\alpha-1}\,dt$$

۲۲) $y^3\,dx + 2(x^2 - xy^2)\,dy = 0$

۲۳) $y\left(1+\sqrt{x^2y^4+1}\right)\,dx + 2x\,dy = 0$

حل مجموعه مسائل ۲.۲

ابتدا همگن بودن معادله را بررسی کرده و سپس با استفاده از تغییر متغیر زیر معادله را به نوع تفکیک پذیر تبدیل می کنیم.

$y=vx,\quad dy = v\,dx + x\,dv,$ یا $y' = v + x\dfrac{dv}{dx}$

۱) $(2x^2+y^2)\,dx = (-2xy+3y^2)\,dy \Rightarrow (2x^2+v^2x^2)\,dx =$

$(-2xvx+3v^2x^2)(v\,dx+x\,dv)\Rightarrow$

$(2+v^2)\,dx = (-2v+3v^2)(v\,dx+x\,dv)$

$\Rightarrow (2+3v^2-3v^3)\,dx = (-2v+3v^2)x\,dv \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = \dfrac{-2v+3v^2}{2+3v^2-3v^3}\,dv$

$\Rightarrow \displaystyle\int\frac{dx}{x} = \int\frac{-2v+3v^2}{2+3v^2-3v^3}\,dv \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{3}\ln(3v^3-3v^2-2)+\ln c$

$\Rightarrow x^{-3} = c^{-1}(3v^3-3v^2-2) = c^{-1}\left(3\dfrac{y^3}{x^3} - 3\dfrac{y^2}{x^2} - 2\right)$

$\Rightarrow c = 3y^3 - 3y^2x - 2x^3 \Rightarrow c = -y^3 - xy^2 + \dfrac{2}{3}x^3$

۲) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{xy}\,dx \Rightarrow x(v\,dx+x\,dv) = (vx+\sqrt{vx^2})\,dx$

$\Rightarrow (v\,dx+x\,dv) = (v+\sqrt{v})\,dx \Rightarrow x\,dv = \sqrt{v}\,dx \Rightarrow \dfrac{dv}{\sqrt{v}}=\dfrac{dx}{x}$

$\Rightarrow 2\sqrt{v} = \ln x + c \Rightarrow 2\sqrt{y/x} = \ln x + c$

۳) $\left(y^2-2xy\right)\,dx + \left(2xy-x^2\right)\,dy = 0$

$\Rightarrow \left(v^2x^2 - 2x^2v\right)\,dx + \left(2x^2v - x^2\right)(v\,dx+x\,dv) = 0$

$\Rightarrow \left(v^2-2v\right)\,dx + (2v-1)(v\,dx+x\,dv) = 0 \Rightarrow$

$\left(3v^2-3v\right)\,dx + (2v-1)\,x\,dv = 0$

$$\Rightarrow \frac{2v-1}{3v^2-3v}\,dv + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\ln(v^2-v) = -\ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow v^2 - v = cx^{-3} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} = cx^{-3}$$

$$\Rightarrow xy^2 - x^2y = c \Rightarrow xy(y-x) = c$$

۴) $xy' - y = \sqrt{x^2-y^2} \Rightarrow x\left(v + x\frac{dv}{dx}\right) - vx = \sqrt{x^2 - x^2v^2}$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1-v^2} \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} v = \ln x + c \Rightarrow y = x\sin(\ln x + c)$$

۵) $\left(xe^{y/x}+y\right)\,dx - x\,dy = 0 \Rightarrow$

$\left(xe^{vx/x}+vx\right)\,dx - x(v\,dx + x\,dv) = 0$

$$\Rightarrow e^v\,dx - x\,dv = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = e^{-v}\,dv \Rightarrow$$

$\ln x + c = -e^{-v} \Rightarrow e^{-y/x} + \ln x + c = 0$

۶) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx}{x} + \frac{x}{vx} \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = v + \frac{1}{v}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = v\,dv \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}v^2 + c \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}(y/x)^2 + c$$

$$\Rightarrow x^2 \ln x = \frac{1}{2}y^2 + cx^2 \Rightarrow y^2 = 2x^2(\ln x + c)$$

۷) $x\left(y' + e^{y/x}\right) = y \Rightarrow x\left(v + x\frac{dv}{dx} + e^{vx/x}\right) = vx \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + e^v = 0$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -e^{-v}\,dv \Rightarrow \ln x = e^{-v} + c \Rightarrow e^{-y/x} = \ln x + c$$

۸) $(x^2+xy)\,dy = \left(x\sqrt{x^2-y^2} + xy + y^2\right)\,dx$

$$\Rightarrow (x^2 + x^2v)(v\,dx + x\,dv) = \left(x\sqrt{x^2 - v^2x^2} + x^2v + v^2x^2\right)\,dx$$

$$\Rightarrow (1+v)(v\,dx + x\,dv) = \left(\sqrt{1-v^2} + v + v^2\right)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}}\,dv \Rightarrow \ln x = \sin^{-1} v - \sqrt{1-v^2} + c$$

$$\Rightarrow \ln x = \sin^{-1}(y/x) - \sqrt{1-(y/x)^2} + c$$

۹) $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x} \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx}{x} + \sin\frac{vx}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sin v}$

$$\Rightarrow \ln x + \ln c = \ln\tan\frac{v}{2} \Rightarrow cx = \tan\frac{y}{2x} \Rightarrow y = 2x\tan^{-1}cx$$

۱۰) $x\,dy = y\cos\ln\frac{y}{x}\,dx \Rightarrow x(v\,dx + x\,dv) = vx\cos\ln\frac{vx}{x}\,dx$

$$\Rightarrow x\,dv = v(\cos\ln v - 1)\,dx \Rightarrow \frac{dv}{v(\cos\ln v - 1)} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{\cos z - 1}, \quad z = \ln v \Rightarrow \ln x + c_0 =$$

$$= \cot\frac{z}{2} \Rightarrow \ln v = 2\cot^{-1}(\ln x + c_0) \Rightarrow \ln\frac{y}{x} = 2\tan^{-1}(\ln x + c)$$

۱۱) $xy' = y + x\tan\frac{y}{x} \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = v + \tan v \Rightarrow \cot v\,dv = \frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow \ln\sin v = \ln x + \ln c \Rightarrow \sin v = cx \Rightarrow y = x\sin^{-1}cx$$

۱۲) $y' = \frac{x-y}{x+3y} \Rightarrow v\,dx + x\,dv = \frac{x-vx}{x+3vx}\,dx$

$$\Rightarrow x\,dv = \frac{1-2v-3v^2}{1+3v}\,dx \Rightarrow \frac{(1+3v)\,dv}{1-2v-3v^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln(3v^2+2v-1) = \ln x + \ln c \quad \Rightarrow 3v^2 + 2v - 1 = \frac{c}{x^2}$$

$$\Rightarrow 3y^2 + 2xy - x^2 = c$$

۱۳) $\frac{dx}{dy} = \frac{5x-y}{2x+2y} \Rightarrow dx = \frac{5x - vx}{2x + 2vx}(v\,dx + x\,dv)$

$$\Rightarrow \frac{5-v}{v^2-3v+2}\,dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{3}{v-2} - \frac{4}{v-1} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow (v-2)^3(v-1)^{-4} = cx \Rightarrow (y-2x)^3 = c(y-x)^4$$

۱۴) ابتدا نقطه بر خورد دو خط را پیدا کرده $(2,-1)$ وبا استفاده از تغییر متغیر $x = X + 2$ و $y = Y - 1$ داریم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x+4y+2} \Rightarrow \frac{dY}{dx} = \frac{X+Y}{X+4Y}$$

$$\Rightarrow v + X\frac{dv}{dX} = \frac{X+vX}{X+4vX} \Rightarrow \frac{4v+1}{1-4v^2}\,dv = \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\ln\frac{2v-1}{2v+1} - \frac{1}{2}\ln(1-4v^2) = \ln cX \Rightarrow$$

$$(2v-1)^3(2v+1) = cX^{-4}$$

$$\Rightarrow (2Y+X)(2Y-X)^3 = c \Rightarrow (x+2y)(2y-x+4)^3 = c$$

۱۵) چون دو خط موازی هستند از تغییر متغیر $u = x - 3y$ استفاده می کنیم.

$$y' = \frac{x-3y+3}{2x-6y+1} \Rightarrow \frac{1}{3}\left(1-\frac{du}{dx}\right) = \frac{u+3}{2u+1}$$

$$\Rightarrow \frac{2u+1}{u+8}\,du = -\,dx \Rightarrow x - 2y + c = 5\ln(x-3y+8)$$

۱۶) دو خط یکدیگر را در نقطه $(3,-2)$ قطع می کنند، لذا از تغییر متغیر $x = X + 3$ و $y = Y - 2$ استفاده می کنیم.

$$(x+y-1)^2\,dy = 2(y+2)^2\,dx \Rightarrow (X+Y)^2\,dY = 2Y^2\,dX$$

$$\Rightarrow (X+vX)^2(v\,dX + X\,dv) =$$

$$= 2(vX)^2\,dX \Rightarrow \frac{(1+v)^2}{v^3+v}\,dv = -\frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} + \frac{2\,dv}{v^2+1} = -\frac{dX}{X} \Rightarrow \ln(y+2) + 2\tan^{-1}\frac{y+2}{x-3} = c$$

$$17)\ y' - \tan\frac{y-2x}{x+1} = \frac{y+2}{x+1} = \frac{y-2x}{x+1} + 2$$

$$\begin{cases} x+1 = 0 \\ y-2x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1,-2) \Rightarrow x = X-1,\ \ y = Y-2$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{dY} - \tan\frac{Y-2X}{X} = \frac{Y-2X}{X} + 2 = \frac{Y}{X}$$

$$\Rightarrow v + X\frac{dv}{dX} - \tan(v-2) = v \Rightarrow \cot(v-2)\,dv = \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \ln\sin(v-2) = \ln cX \Rightarrow \sin\frac{y-2x}{x+1} = c(x+1)$$

$$18)\ \begin{cases} x+y = 0 \\ x+3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-3,3) \Rightarrow x = X-3,\ \ y = Y+3$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX}\ln\frac{Y+X}{X} = \frac{Y+X}{X} - \ln\frac{Y+X}{X}$$

$$\Rightarrow \ln(v+1)(v\,dX + X\,dv) = (v+1-\ln(v+1))\,dX$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{\ln(v+1)}{(1-\ln(v+1))(v+1)}\,dv =$$

$$= -\frac{dv}{v+1} + \frac{dv}{(v+1)(1-\ln(v+1))}$$

$$\Rightarrow \ln X = -\ln(v+1) - \ln(1-\ln(v+1)) + \ln c$$

$$\Rightarrow X(v+1)(1-\ln(v+1)) = c \Rightarrow \ln\frac{y+x}{x+3} = \frac{c}{x+y} + 1$$

$$19)\ xy' = y + x^2\sec\frac{y}{x} \Rightarrow v + xv' = v + x\sec v$$

$$\Rightarrow \cos v\,dv = dx \Rightarrow \sin v = x + c \Rightarrow y = x\sin^{-1}(x+c)$$

$$20)\ (x^2+1)y(xy'-y) = x^3 \Rightarrow (x^2+1)vx(x(v+xv')-vx) = x^3$$

$$\Rightarrow vv'(x^2+1) = 1 \Rightarrow v\,dv = \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow v^2 = 2\tan^{-1}x + c \Rightarrow y^2 = 2x^2\tan^{-1}x + cx^2$$

$$21)\ xy' - y - x^2\tan\frac{y}{x} = 0 \Rightarrow v + xv' - v - x\tan v = 0$$

$$\Rightarrow \cot v\,dv = dx \Rightarrow \sin\frac{y}{x} = ce^x$$

$$22)\ y^3\,dx + 2(x^2 - xy^2)\,dy = 0 \Rightarrow t^{3\alpha}\,dx + 2\alpha(x^2 - xt^{2\alpha})t^{\alpha-1}\,dt = 0$$

برای همگن بودن معادله باید $2\alpha + 1 = 2$ و همچنین $1 - \alpha + 2 = 3\alpha$ باشد.

$$\begin{cases} 1 + 2\alpha = 2 \\ 1 + \alpha = 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$t^{3/2} dx + (x^2 - xt) t^{-1/2} dt = 0 \Rightarrow t^2 dx + (x^2 - xt) dt = 0$$

$$t = vx,\ vx^2 dx + (x^2 - vx^2) x dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{1 - v}{v} dv = 0 \Rightarrow \ln x + \ln v + \ln c = v \Rightarrow y^2 = x \ln cy^2$$

۲۳) $y\left(1 + \sqrt{x^2 y^4 + 1}\right) dx + 2x\, dy = 0$

$$\Rightarrow t^{\alpha}\left(1 + \sqrt{x^2 t^{4\alpha} + 1}\right) dx + 2\alpha t^{\alpha - 1} x\, dt = 0$$

شرط همگن شدن این معادله آنست که $2 + 4\alpha = 0$ باشد بنابراین با تغییر متغیر $y = t^{-1/2}$ معادله تبدیل به نوع همگن می شود.

$$t^{-1/2}\left(1 + \sqrt{x^2 t^{-2} + 1}\right) dx - x t^{-3/2} = 0$$

طرفین معادله را در $t^{3/2}$ ضرب و از تغییر متغیر $t = vx$ استفاده می کنیم.

$$v(1 + \sqrt{v^{-2} + 1})\, dx = v\, dx + x\, dv \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}}$$

$$\Rightarrow \ln x + \ln c = \ln(v + \sqrt{1 + v^2}) \Rightarrow \sqrt{1 + x^2 y^2} = cx^2 y^2 - 1$$

مجموعه مسائل معادلات کامل، ۳.۲

نشان دهید معادلات دیفرانسیل زیر کامل هستند و جواب عمومی را به‌دست آورید.

۱) $(x^2 + y)\, dx + (x - 2y)\, dy$

۲) $(6x^5 y^3 + 4x^3 y^5)\, dx + (3x^6 y^2 + 5x^4 y^4)\, dy = 0$

۳) $x(1 - y^2)\, dx + y(8 - x^2)\, dy = 0$

۴) $2x \sin 3y\, dy + 3x^2 \cos 3y\, dy = 0$

۵) $\left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right) dx + \left(2xye^{xy^2} - 3y^2\right) dy = 0$

۶) $y' = -\dfrac{ye^x + e^y}{e^x + xe^y}$

۷) $\dfrac{dr}{dq} = -\dfrac{r(\sin q + \cos q)}{r + \sin q - \cos q}$

۸) $(e^x \sin y - 2y \sin x)\, dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)\, dy = 0$

۹) $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + 2x)\, dx + (xe^{xy} \cos 2x - 3)\, dy = 0$

۱۰) $\left(\dfrac{y}{x} + 6x\right) dx + (\ln x - 2)\, dy = 0$

۱۱) $\left(3x^2 \tan y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right) dx + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right) dy = 0$

۱۲) $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0$

۱۳) $\left(\sin y + y \sin x + \dfrac{1}{x}\right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right) dx = 0$

معادلات با شرایط اولیه زیر را حل کنید.

۱۴) $(2rq - \tan q)\, dr + r(r - \sec^2 q)\, dq = 0,\quad r = 1,$ وقتی $q = \dfrac{\pi}{4}$

۱۵) $\cos q\, dr - (r \sin q + 1)\, dq = 0,\quad r = 2,$ وقتی $q = 0$

۱۶) $(2 - xy^2)\, dx - x^2 y\, dy = 0,\quad x = 2,$ وقتی $y = 1$

۱۷) $u(u^2+v^2)\,du+(v^3+u^2v-1)\,dv=0,\quad u=1,$ وقتی $v=1$

۱۸) $e^x(y^3+xy^3+1)\,dx+3y^2(xe^x-6)\,dy=0,\quad =0,$ وقتی $y=1$

حل مجموعه مسائل ۲.۳

ابتدا باید کامل بودن معادله را بررسی کرده و سپس آنرا حل کرد. چون این معادلات کامل هستند ما فقط به حل آنها می پردازیم.

۱) $P=x^2+y,\quad Q=x-2y \Rightarrow u(x,y)=u=\int (x^2+y)\,dx+f(y)$

$$\Rightarrow u=\frac{x^3}{3}+xy+f(y)\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=x+\frac{df}{dy}=x-2y$$

$$\Rightarrow f(y)=-\int 2y\,dy=-y^2\Rightarrow u=\frac{x^3}{3}+xy-y^2=c$$

۲) $P=6x^5y^3+4x^3y^5,\quad Q=3x^6y^2+5x^4y^4$

$$u=\int P\,dx+f(y)=x^6y^3+x^4y^5+f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=3x^6y^2+5x^4y^4+\frac{df}{dy}=Q\Rightarrow \frac{df}{dy}=0$$

$$\Rightarrow f(y)=c_1\Rightarrow u=x^6y^3+x^4y^5=c$$

۳) $P=x(1-y^2),\quad Q=y(8-x^2)$

$$u=\int P\,dx+f(y)=\frac{1}{2}x^2(1-y^2)+f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=-yx^2+f'(y)=y(8-x^2)$$

$$\Rightarrow f(y)=4y^2\Rightarrow u=x^2(1-y^2)+8y^2=c$$

۴) $P=2x\sin 3y,\quad Q=3x^2\cos 3y$

$$u=\int P\,dx+f(y)=x^2\sin 3y+f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=3x^2\cos 3y+f'(y)=3x^2\cos 3y$$

$$\Rightarrow f'(y)=0,\quad f(y)=c_1\Rightarrow u=x^2\sin 3y=c$$

۵) $P=y^2e^{xy^2}+4x^3,\quad Q=2xye^{xy^2}-3y^2$

$$u = \int P\,dx + f(y) = e^{xy^2} + x^4 + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 2xye^{xy^2} + f'(y) = 2xye^{xy^2} - 3y^2$$

$$\Rightarrow f'(y) = -3y^2,\quad f(y) = -y^3 \Rightarrow u = e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c$$

۶) $P = ye^x + e^y,\quad Q = e^x + xe^y$

$$u = \int P\,dx + f(y) = ye^x + xe^y + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = e^x + xe^y + f'(y) = e^x + xe^y$$

$$\Rightarrow f'(y) = 0,\quad f(y) = c_1 \Rightarrow u = ye^x + xe^y = c$$

۷) $P = r(\sin q + \cos q),\quad Q = r + \sin q - \cos q$

$$u = \int P\,dq + f(r) = r(-\cos q + \sin q) + f(r)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \sin q - \cos q + f'(r) = r + \sin q - \cos q$$

$$\Rightarrow f(r) = \frac{r^2}{2} \Rightarrow u = 2r(-\cos q + \sin q) + r^2 = c$$

۸) $P = e^x \sin y - 2y\sin x,\quad Q = e^x \cos y + 2\cos x$

$$u = \int P\,dx + f(x) = e^x \sin y + 2y\cos x + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + 2\cos x + f'(y) = e^x \cos y + 2\cos x$$

$$\Rightarrow f'(y) = 0,\quad f(y) = c_1 \Rightarrow u = e^x \sin y + 2y\cos x = c$$

۹) $P = ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\sin 2x + 2x,\quad Q = xe^{xy}\cos 2x - 3$

$$u = \int Q\,dy + f(x) = e^{xy}\cos 2x - 3y + f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\sin 2x + f'(x) = P$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x,\quad f(x) = x^2 \Rightarrow u = e^{xy}\cos 2x - 3y + x^2 = c$$

۱۰) $P = \frac{y}{x} + 6x,\quad Q = \ln x - 2$

$$u = \int Q\,dy + f(x) = y(\ln x - 2) + f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x} + f'(x) = \frac{y}{x} + 6x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 6x,\quad f(x) = 3x^2 \Rightarrow u = y\ln x - 2y + 3x^2 = c$$

۱۱) $P = 3x^2\tan y - \frac{2y^3}{x^3},\quad Q = x^3\sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}$

$$u = \int P\,dx + f(y) = x^3\tan y + \frac{y^3}{x^2} + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = x^3\sec^2 y + \frac{3y^2}{x^2} + f'(y) = Q$$

$$\Rightarrow f'(y) = 4y^3,\quad f(y) = y^4 \Rightarrow u = x^3\tan y + \frac{y^3}{x^2} + y^4 = c$$

۱۲) $P = \frac{\sin 2x}{y} + x,\quad Q = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$

$$u = \int P\,dx + f(y) = -\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\cos 2x}{2y^2} + f'(y) = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\Rightarrow f'(y) = y - \frac{1}{2y^2},\quad f(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y} \Rightarrow u = \frac{\sin^2 x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{2} = c$$

۱۳) $P = \sin y + y\sin x + \frac{1}{x},\quad Q = x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}$

$$u = \int P\,dx + f(y) = x\sin y - y\cos x + \ln x + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = x\cos y - \cos x + f'(y) = x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow f'(y) = \frac{1}{y},\quad f(y) = \ln y \Rightarrow u = x\sin y - y\cos x + \ln x + \ln y = c$$

۱۴) $P = 2rq - \tan q,\quad Q = r(r - \sec^2 q)$

$$u = \int P\, dr + f(q) = r^۲ q - r\tan q + f(q)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial q} = r^۲ - r\sec^۲ q + f'(q) = r(r - \sec^۲ q) + f'(q)$$

$$\Rightarrow f'(q) = ۰,\quad f(q) = c_۱ \Rightarrow u = r^۲ q - r\tan q = c$$

$$r = ۱,\quad q = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow c = \frac{\pi}{۴} - ۱ \Rightarrow u = r^۲ q - r\tan q = \frac{\pi}{۴} - ۱$$

۱۵) $P = \cos q,\quad Q = -(r\sin q + ۱)$

$$u = \int P\, dr + f(q) = r\cos q + f(q)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial q} = -r\sin q + f'(q) = -r\sin q - ۱$$

$$\Rightarrow f'(q) = -۱,\quad f(q) = -q \Rightarrow u = r\cos q - q = c$$

$$r = ۲,\quad q = ۰ \Rightarrow c = ۲ \Rightarrow u = r\cos q - q = ۲$$

۱۶) $P = ۲ - xy^۲,\quad Q = -x^۲ y$

$$u = \int P\, dx + f(y) = ۲x - \frac{۱}{۲}x^۲y^۲ + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -x^۲ y + f'(y) = -x^۲ y$$

$$\Rightarrow f'(y) = ۰,\quad f(y) = c_۱ \Rightarrow u = ۴x - x^۲y^۲ = c$$

$$x = ۲,\quad y = ۱ \Rightarrow c = ۴ \Rightarrow u = ۴x - x^۲y^۲ = ۴$$

۱۷) $P = u(u^۲ + v^۲),\quad Q = v^۳ + u^۲v - ۱$

$$U = \int P\, du + f(v) = \frac{۱}{۴}u^۴ + \frac{۱}{۲}u^۲v^۲ + f(v)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial v} = u^۲v + f'(v) = v^۳ + u^۲v - ۱$$

$$\Rightarrow f'(v) = v^۳ - ۱,\quad f(v) = \frac{۱}{۴}v^۴ - v \Rightarrow$$

$$U = \frac{۱}{۴}u^۴ + \frac{۱}{۲}u^۲v^۲ + \frac{۱}{۴}v^۴ - v = c$$

$$u = ۱,\quad v = ۱ \Rightarrow c = ۰ \Rightarrow U = u^۴ + ۲u^۲v^۲ + v^۴ = ۴v$$

۱۸) $P = e^x(y^۳ + xy^۳ + ۱),\quad Q = ۳y^۲(xe^x - ۶)$

$$u = \int Q\, dy + f(x) = y^۳(xe^x - ۶) + f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = e^x y^۳(x + ۱) + f'(x) = e^x(y^۳ + xy^۳ + ۱)$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^x,\quad f(x) = e^x \Rightarrow u = y^۳(xe^x - ۶) + e^x = c$$

$$x = ۰,\quad y = ۱ \Rightarrow c = -۵ \Rightarrow u = y^۳(xe^x - ۶) + e^x = -۵$$

مجموعه مسائل فاکتور انتگرال، ۴.۲

با پیدا کردن فاکتور انتگرال، معادله های زیر را حل کنید.

۱) $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = ۰$

۲) $(x^۴y^۲ - y)\,dx + (x^۲y^۴ - x)\,dy = ۰$

۳) $y(۲x + y^۳)\,dx - x(۲x - y^۳)\,dy = ۰$

۴) $(x^۲ + y^۲ + x)\,dx + xy\,dy = ۰$

۵) $e^x(x+۱)\,dx + (ye^y - xe^x)\,dy = ۰$

۶) $y(y + ۲x + ۱)\,dx - x(۲y + x - ۱)\,dy = ۰$

۷) $۳(y+x)^۲\,dx + x(۳y + ۲x)\,dy = ۰$

۸) $(x + \sin x + \sin y)\,dx + \cos y\,dy = ۰$

۹) $(x^۴\ln x - ۲xy^۳)\,dx + ۳x^۲y^۲\,dy = ۰$

۱۰) $y' = e^{۲x} + y - ۱$ ۱۱) $dx + \left(\frac{x}{y} - \sin y\right)\,dy = ۰$

۱۲) $y\,dx + (۲xy - e^{-۲y})\,dy = ۰$

۱۳) $e^x\,dx + (e^x\cot y + ۲y\csc y)\,dy = ۰$

۱۴) $\left(۳x + \frac{۶}{y}\right)\,dx + \left(\frac{x^۲}{y} + ۳\frac{y}{x}\right)\,dy = ۰$

۱۵) $(xy - ۲y^۲)\,dx - (x^۲ - ۳xy)\,dy = ۰$

۱۶) $y\,dx + x(x^۲y - ۱)\,dy = ۰$

۱۷) $(x+y)\,dx - (x-y)\,dy = ۰$ ۱۸) $(y + \ln x)\,dx - x\,dy = ۰$

۱۹) $y(y^۲ - ۲x^۲)\,dx + x(۲y^۲ - x^۲)\,dy = ۰$

حل مجموعه مسائل ۴.۲

۱) $P = x\sin y + y\cos y,\quad Q = x\cos y - y\sin y$

$$\frac{۱}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{x\cos y + \cos y - y\sin y - \cos y}{x\cos y - y\sin y} = ۱$$

$$\Rightarrow F = e^{\int dx} = e^x$$

طرفین معادله را در e^x ضرب کرده و معادله کامل بدست آمده را حل می کنیم.

$$P^* = e^x(x\sin y + y\cos y),\quad Q^* = e^x(x\cos y - y\sin y)$$

$$u = \int P^*\,dx + f(y) = e^x(x-۱)\sin y + ye^x\cos y + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x-۱)\cos y + e^x\cos y -$$

$$-ye^x\sin y + f'(y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$$

$$\Rightarrow f'(y) = ۰,\quad f(y) = c_۱ \Rightarrow u = e^x(x-۱)\sin y + ye^x\cos y = c$$

۲) $x^\alpha y^\beta(x^۴y^۲ - y)\,dx + x^\alpha y^\beta(x^۲y^۴ - x)\,dy = ۰$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = (۲+\beta)x^{۴+\alpha}y^{۱+\beta} - (۱+\beta)x^\alpha y^\beta \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = (۲+\alpha)y^{۴+\beta}x^{۱+\alpha} - (۱+\alpha)y^\beta x^\alpha \end{cases} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \alpha = \beta = -۲$$

$x^{-۲}y^{-۲}$ فاکتور انتگرال معادله می باشد.

$$P^* = x^۲ - x^{-۲}y^{-۱}\quad Q^* = y^۲ - x^{-۱}y^{-۲}$$

$$u = \int P^*\,dx + f(y) = \frac{۱}{۳}x^۳ + x^{-۱}y^{-۱} + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -x^{-۱}y^{-۲} + f'(y) = y^۲ - x^{-۱}y^{-۲}$$

$$\Rightarrow f'(y) = y^۲,\quad f(y) = \frac{۱}{۳}y^۳ \Rightarrow u = x^۴y + xy^۴ + ۳ + cxy = ۰$$

۳) $P = y(۲x + y^۳),\quad Q = -x(۲x - y^۳)$

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{3(2x+y^3)}{y(2x+y^3)}=\frac{3}{y}\Rightarrow F=e^{-\int 3y\,dy}=\frac{1}{y^3}$$

$$P^*=y^{-2}(2x+y^3),\quad Q^*=-2x^2y^{-3}+x$$

$$u=\int P^*\,dx+f(y)=x^2y^{-2}+xy+f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=-2x^2y^{-3}+x+f'(y)=-2x^2y^{-3}+x$$

$$\Rightarrow f'(y)=0,\quad f(y)=c_1\Rightarrow u=x^2y^{-2}+xy=c$$

۴) $P=x^2+y^2+x,\quad Q=xy$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x}\Rightarrow F=e^{\int\frac{dx}{x}}=x$$

$$P^*=x^3+xy^2+x^2,\quad Q^*=x^2y$$

$$u=\int P^*\,dx+f(y)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}x^3+f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=x^2y+f'(y)=x^2y$$

$$\Rightarrow f'(y)=0,\quad f(y)=c_1\Rightarrow u=3x^4+6x^2y^2+4x^3=c$$

۵) $P=e^x(x+1),\quad Q=ye^y-xe^x$

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{e^x(x+1)}{e^x(x+1)}=1\Rightarrow F=e^{-\int dy}=e^{-y}$$

$$P^*=e^{x-y}(x+1),\quad Q^*=y-xe^{x-y}$$

$$u=\int P^*\,dx+f(y)=xe^{x-y}+f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=-xe^{x-y}+f'(y)=y-xe^{x-y}$$

$$\Rightarrow f'(y)=y,\quad f(y)=\frac{1}{2}y^2\Rightarrow u=2xe^{x-y}+y^2=c$$

۶) $x^\alpha y^{1+\beta}(y+2x+1)\,dx-x^{1+\alpha}y^\beta(2y+x-1)\,dy=0$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial y}=(2+\beta)x^\alpha y^{1+\beta}+2(1+\beta)x^{1+\alpha}y^\beta+(1+\beta)x^\alpha y^\beta\\[2mm]\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2(1+\alpha)y^{1+\beta}x^\alpha-(2+\alpha)y^\beta x^{1+\alpha}+(1+\alpha)x^\alpha y^\beta\end{cases}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow\alpha=\beta=-\frac{4}{3}$$

$(xy)^{-4/3}$ فاکتور انتگرال معادله می باشد.

$$P^*=x^{-4/3}y^{-1/3}(y+2x+1),\quad Q^*=-x^{-1/3}y^{-4/3}(2y+x-1)$$

$$u=\int P^*\,dx+f(y)=-3x^{-1/3}y^{2/3}+3x^{2/3}y^{-1/3}-3x^{-1/3}y^{-1/3}+f(y)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=-2x^{-1/3}y^{-1/3}-x^{2/3}y^{-4/3}+x^{-1/3}y^{-4/3}+f'(y)=$$

$$-x^{-1/3}y^{-4/3}(2y+x-1)\Rightarrow f'(y)=0,\quad f(y)=c_1$$

$$\Rightarrow u=-3x^{-1/3}y^{2/3}+3x^{2/3}y^{-1/3}-3x^{-1/3}y^{-1/3}=c$$

$$\Rightarrow x^{-1/3}y^{-1/3}(y+x-1)=c\Rightarrow(y+x-1)^3=cxy$$

۷) $P=3(y+x)^2,\quad Q=x(3y+2x)$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{3y+2x}{x(3y+2x)}=\frac{1}{x}\Rightarrow F=e^{\int\frac{dx}{x}}=x$$

$$P^*=3x(y+x)^2,\quad Q^*=x^2(3y+2x)$$

$$u=\int P^*\,dx+f(y)=\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{3}{4}x^4+2x^3y+f(y)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y+2x^3+f'(y)=x^2(3y+2x)$$

$$\Rightarrow f'(y)=0,\quad f(y)=c_1\Rightarrow u=6x^2y^2+3x^4+8x^3y=c$$

۸) $P=x+\sin x+\sin y,\quad Q=\cos y$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{\cos y}{\cos y}=1\Rightarrow F=e^{\int dx}=e^x$$

$$P^*=e^x(x+\sin x+\sin y),\quad Q^*=e^x\cos y$$

$$u = \int Q^* \, dy + f(x) = e^x \sin y + f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y + f'(y) = e^x(x + \sin x + \sin y)$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^x(x + \sin x), \quad f(x) = \frac{۱}{۲} e^x(۲x - ۲ + \sin x - \cos x)$$

$$\Rightarrow u = ۲e^x(\sin y + ۲x - ۲ + \sin x - \cos x) = c$$

۹) $P = x^۴ \ln x - ۲xy^۳, \quad Q = ۳x^۲ y^۲$

$$\frac{۱}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{-۱۲xy^۲}{۳x^۲y^۲} = -\frac{۴}{x} \Rightarrow F = e^{-۴\int \frac{dx}{x}} = x^{-۴}$$

$$P^* = \ln x - ۲x^{-۳}y^۳, \quad Q^* = ۳x^{-۲}y^۲$$

$$u = \int Q^* \, dy + f(x) = x^{-۲}y^۳ + f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -۲x^{-۳}y^۳ + f'(x) = \ln x - ۲x^{-۳}y^۳$$

$$\Rightarrow f'(y) = \ln x, \quad f(y) = x \ln x - x \Rightarrow u = x^{-۲}y^۳ + x \ln x - x = c$$

۱۰) $P = e^{۲x} + y - ۱, \quad Q = -۱$

$$\frac{۱}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{۱}{-۱} = -۱ \Rightarrow F = e^{-\int dx} = e^{-x}$$

$$P^* = e^x + e^{-x}(y - ۱), \quad Q^* = -e^{-x}$$

$$u = \int Q^* \, dy + f(x) = -ye^{-x} + f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = ye^{-x} + f'(x) = e^x + e^{-x}(y - ۱)$$

$$\Rightarrow f'(y) = e^x - e^{-x}, \quad f(y) = e^x + e^{-x} \Rightarrow u = -ye^{-x} + e^x + e^{-x} = c$$

۱۱) $P = ۱, \quad Q = \frac{x}{y} - \sin y$

$$\frac{۱}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{-۱/y}{۱} = \frac{-۱}{y} \Rightarrow F = e^{\int \frac{dy}{y}} = y$$

$$P^* = y, \quad Q^* = x - y \sin y$$

$$u = \int P^* \, dx + f(y) = xy + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = x + f'(x) = x - y \sin y$$

$$\Rightarrow f'(y) = -y \sin y, \quad f(y) = y \cos y - \sin y \Rightarrow$$

$$u = xy + y \cos y - \sin y = c$$

۱۲) $P = y, \quad Q = ۲xy - e^{-۲y}$

$$\frac{۱}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{۱ - ۲y}{y} = \frac{۱}{y} - ۲ \Rightarrow F = e^{-\int (\frac{۱}{y} - ۲) \, dy} = \frac{۱}{y} e^{۲y}$$

$$P^* = e^{۲y}, \quad Q^* = ۲xe^{۲y} - \frac{۱}{y}$$

$$u = \int P^* \, dx + f(y) = xe^{۲y} + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = ۲xe^{۲y} + f'(y) = ۲xe^{۲y} - \frac{۱}{y}$$

$$\Rightarrow f'(y) = -\frac{۱}{y}, \quad f(y) = -\ln y \Rightarrow u = xe^{۲y} - \ln y = c$$

۱۳) $P = e^x, \quad Q = e^x \cot y + ۲y \csc y$

$$\frac{۱}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{e^x \cot y}{e^x} = -\cot y \Rightarrow F = e^{\int \cot y dy} = \sin y$$

$$P^* = e^x \sin y, \quad Q^* = e^x \cos y + ۲y$$

$$u = \int P^* \, dx + f(y) = e^x \sin y + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + f'(y) = e^x \cos y + ۲y$$

$$\Rightarrow f'(y) = ۲y, \quad f(y) = y^۲ \Rightarrow u = e^x \sin y + y^۲ = c$$

۱۴) $x^\alpha y^\beta \left(۳x + \frac{۶}{y}\right) \, dx + x^\alpha y^\beta \left(\frac{x^۲}{y} + \frac{۳y}{x}\right) \, dy = ۰$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 3\beta x^{1+\alpha} y^{\beta-1} + 6(\beta - 1)x^{\alpha} y^{\beta-2} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = (2+\alpha) y^{\beta-1} x^{1+\alpha} + 3(\alpha - 1) y^{\beta+1} x^{\alpha-2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 1$$

xy فاکتور انتگرال معادله می باشد.

$$P^* = 3x^2 y + 6x, \quad Q^* = x^3 + 3y^2$$

$$u = \int P^* \, dx + f(y) = x^3 y + 3x^2 + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + f'(y) = x^3 + 3y^2$$

$$\Rightarrow f'(y) = 3y^2, \ \ f(y) = y^3 \Rightarrow u = x^3 y + 3x^2 + y^3 = c$$

۱۵) $P = xy - 2y^2, \quad Q = -(x^2 - 3xy)$

$$F = \frac{1}{xp + yQ} = \frac{1}{xy^2}, \quad P^* = y^{-1} - 2x^{-1}, \quad Q^* = -(xy^{-2} - 3y^{-1})$$

$$u = \int P^* \, dx + f(y) = xy^{-1} - 2\ln x + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -xy^{-2} + f'(y) = -xy^{-2} + 3y^{-1}$$

$$\Rightarrow f'(y) = 3y^{-1}, \ \ f(y) = 3\ln y \Rightarrow u = xy^{-1} - 2\ln x + 3\ln y = c$$

۱۶) $x^{\alpha} y^{\beta+1} \, dx + x^{\alpha} y^{\beta}(x^2 y - 1) \, dy = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = (1+\beta) x^{\alpha} y^{\beta} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = (3+\alpha) y^{\beta+1} x^{2+\alpha} - (\alpha + 1) y^{\beta} x^{\alpha} \end{cases} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\alpha = -3, \quad \beta = 1$$

$x^{-3}y$ فاکتور انتگرال معادله می باشد.

$$P^* = x^{-3} y^2, \quad Q^* = y^2 - x^{-2} y$$

$$u = \int P^* \, dx + f(y) = \frac{-1}{2} x^{-2} y^2 + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -x^{-2} y + f'(y) = y^2 - x^{-2} y$$

$$\Rightarrow f'(y) = y^2, \ \ f(y) = \frac{1}{3} y^3 \Rightarrow u = -3y^2 + 2x^2 y^3 = cx^2$$

۱۷) $P = x + y, \quad Q = -x + y$

$$F = \frac{1}{xP + yQ} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$P^* = \frac{x+y}{x^2 + y^2}, \quad Q^* = \frac{y - x}{x^2 + y^2}$$

$$u = \int P^* \, dx + f(y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \tan^{-1} \frac{x}{y} + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} + f'(y) = \frac{y - x}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow f'(y) = 0, \ \ f(y) = c_1 \Rightarrow u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \tan^{-1} \frac{x}{y} = c$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = ce^{2\tan^{-1} \frac{x}{y}}$$

۱۸) $P = y + \ln x, \quad Q = -x$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2}{-x} \Rightarrow F = e^{-\int(\frac{2}{x}\, dx} = \frac{1}{x^2}$$

$$P^* = \frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}, \quad Q^* = -\frac{1}{x}$$

$$u = \int Q^* \, dy + f(x) = -\frac{y}{x} + f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2} + f'(x) = \frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}, \quad f(x) = -\frac{1 + \ln x}{x} \Rightarrow u = y + 1 + \ln x = cx$$

۱۹) $x^{\alpha} y^{1+\beta}(y^3 - 2x^2) \, dx + x^{1+\alpha} y^{\beta}(2y^3 - x^2) \, dy = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = (۳+\beta)x^{\alpha} y^{۲+\beta} - ۲(۱+\beta)y^{\beta} x^{۲+\alpha} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = ۲(۱+\alpha)y^{\beta+۲}x^{\alpha} - (۳+\alpha)y^{\beta} x^{۲+\alpha} \end{cases} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \alpha = \beta = ۱$$

xy فاکتور انتگرال معادله می باشد.

$$P^* = xy^{۲}(y^{۲} - ۲x^{۲}), \quad Q^* = x^{۲}y(۲y^{۳} - x^{۲})$$

$$u = \int P^*\, dx + f(y) = \frac{۱}{۲}x^{۲}y^{۴} - \frac{۱}{۲}x^{۴}y^{۲} + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = ۲x^{۲}y^{۳} - x^{۴}y + f'(y) = x^{۲}y(۲y^{۳} - x^{۲})$$

$$\Rightarrow f'(y) = ۰, \quad f(y) = c_{۱} \Rightarrow u = x^{۲}y^{۴} - x^{۴}y^{۲} = c$$

۵.۲ ، مجموعه مسائل معادلات خطی مرتبه اول

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

۱) $y' + ۲y = e^{-x}$ ۲) $xy' + ۲y = ۸x^{۲}$

۳) $y' - y\cot x = \csc x$ ۴) $\dfrac{dy}{dx} = \cos x - y\sec x$

۵) $y' - ۳y\tan x = ۲$ ۶) $(x^{۲} + ۲x - ۱)y' - (x+۱)y = x - ۱$

۷) $y' - ۲xy = ۲xe^{x^{۲}}$ ۸) $x(۱ + ۲y)dx - dy = ۰$

۹) $y' + y\cos x = e^{x^{۲}}$ ۱۰) $xy' + y = x\sin x$

۱۱) $xy' - y = x^{۲}\sin x$ ۱۲) $y' + ۲xy = xe^{-x^{۲}}$

۱۳) $(۱ + x^{۲})y' = ۲xy + (۱ + x^{۲})^{۲}$ ۱۴) $y' = \dfrac{۲y}{x+۱} + e^{x}(۱+x)^{۲}$

معادلات با شرایط اولیه زیر را حل کنید.

۱۵) $xy' + ۲y = x^{۲}, \quad x = -۱,$ وقتی $y = \dfrac{۵}{۴}$

۱۶) $x^{۲}y' + ۲xy = \cos x, \quad x = \pi,$ وقتی $y = ۰$

۱۷) $xy' + ۲y = \dfrac{\ln x}{x^{۲}}, \quad x = ۱,$ وقتی $y = ۳$

۱۸) $y' = ۲y + e^{x} - x, \quad x = ۰,$ وقتی $y = \dfrac{۱}{۴}$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۱۹) $y' = \dfrac{۱}{y(۱-x)}$ ۲۰) $\dfrac{dx}{dy} = y - ۴xy$

۲۱) $y' = \dfrac{y}{x + y^{۲}}$ ۲۲) $y' + \tan y = \dfrac{x}{\cos y}$

۲۳) $(۱ + y^{۲})\, dx = (\sqrt{۱ + y^{۲}}\cos y - xy)\, dy$

معادلات دیفرانسیل برنولی زیر را حل کنید.

۲۴) $xy' + xy^۲ = y$ ۲۵) $xy' - y(۲y\ln x - ۱) = ۰$

۲۶) $۲xyy' + x = y^۲$ ۲۷) $y' + ۴xy = ۲xe^{-x^۲}\sqrt{y}$

۲۸) $y' = y(y^۳\cos x + \tan x)$ ۲۹) $y' = \dfrac{x(x^۲ + y^۲ - ۱)}{۲y(x^۲ - ۱)}$

معادلات دیفرانسیل برنولی زیر را حل کنید

۳۰) $y' = \dfrac{۲xy}{x^۲ - y^۲ - ۴}$ ۳۱) $(xy + x^۲y^۳)y' = ۱$

۳۲) $y'x^۳\sin y + ۲y = xy'$ ۳۳) $۲\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{x}{y} + x^۳\cos y = ۰$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۳۴) $y' + ۱ = ۴e^{-y}\sin x$ ۳۵) $y'\cos y + x\sin y = ۲x$

۳۶) $۲(y + ۱)y' - \dfrac{۲}{x}(y + ۱)^۲ = x^۴$

معادلات دیفرانسیل ریکاتی زیر را حل کنید.

۳۷) $y' = ۲\tan x\sec x - y^۲\sin x, \quad y_۱(x) = \sec x$

۳۸) $y' = \dfrac{۱}{x^۲} - \dfrac{y}{x} - y^۲, \quad y_۱(x) = \dfrac{۱}{x}$

۳۹) $y' = y^۲ - \dfrac{۲}{x^۲}, \quad y_۱(x) = \dfrac{۱}{x}$

۴۰) $y' = y^۲ + ۸xy + ۱۶x^۲ - ۵, \quad y_۱(x) = ۱ - ۴x$

حل مجموعه مسائل ۵.۲

۱) $f(x) = ۲, \quad q(x) = e^x, \quad g(x) = \int f(x)\,dx = ۲x$

$\Rightarrow y = e^{-۲x}\left(\int e^x\,dx + c\right) = e^{-x} + ce^{-۲x}$

۲) $f(x) = \dfrac{۲}{x}, \quad q(x) = ۸x, \quad g(x) = \int f(x)\,dx = ۲\ln x$

$\Rightarrow y = e^{-۲\ln x}\left(\int ۸xe^{۲\ln x}\,dx + c\right) = ۲x^۲ + cx^{-۲}$

۳) $f(x) = -\cot x, \quad q(x) = \csc x, \quad g(x) = \int f(x)\,dx = -\ln\sin x$

$\Rightarrow y = \sin x\left(\int \csc^۲ x\,dx + c\right) = -\cos x + c\sin x$

۴) $f(x) = \sec x, q(x) = \cos x, g(x) = \int f(x)\,dx = \ln(\sec x + \tan x)$

$\Rightarrow y = \dfrac{۱}{\ln\sec x + \tan x}\left(\int(\sec x + \tan x)\cos x\,dx + c\right) =$
$\dfrac{x - \cos x + c}{\sec x + \tan x}$

۵) $f(x) = -۳\tan x, q(x) = ۲, g(x) = \int f(x)\,dx = ۳\ln\cos x$

$\Rightarrow y = \cos^{-۳} x\left(\int ۲\cos^۳ x\,dx + c\right) =$
$\dfrac{۲}{۳}\dfrac{(۳ - \sin^۲ x)\sin x}{\cos^۳ x} + c\sec^۳ x$

۶) $f(x) = -\dfrac{x + ۱}{x^۲ + ۲x - ۱}, q(x) = \dfrac{x - ۱}{x^۲ + ۲x - ۱}, g(x) = \int f(x)\,dx =$
$-\dfrac{۱}{۲}\ln(x^۲ + ۲x - ۱) \Rightarrow y = \sqrt{x^۲ + ۲x - ۱}$
$\left(\int \dfrac{x - ۱}{(x^۲ + ۲x - ۱)^{۳/۲}}\,dx + c\right) = c\sqrt{x^۲ + ۲x - ۱} + x$

۷) $f(x) = -۲x, \quad q(x) = ۲xe^{x^۲}, \quad g(x) = \int f(x)\,dx = -x^۲$

$$\Rightarrow y = e^{x^2}\left(\int 2x\, dx + c\right) = (x^2 + c)e^{x^2}$$

۸) $f(x) = -2x, \quad q(x) = x, \quad g(x) = \int f(x)\, dx = -x^2$

$$\Rightarrow y = e^{x^2}\left(-\int x e^{-x^2}\, dx + c\right) = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$$

۹) $f(x) = \cos x, \quad q(x) = e^{2x}, \quad g(x) = \int f(x)\, dx = \sin x$

$$\Rightarrow y = e^{-\sin x}\left(\int e^{2x+\sin x}\, dx + c\right)$$

۱۰) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = \sin x, \quad g(x) = \int f(x)\, dx = \ln x$

$$\Rightarrow y = e^{-\ln x}\left(\int x \sin x\, dx + c\right) = -\cos x + \frac{c + \sin x}{x}$$

۱۱) $f(x) = \frac{-1}{x}, \quad q(x) = x \sin x, \quad g(x) = \int f(x)\, dx = \ln x$

$$\Rightarrow y = e^{\ln x}\left(\int \sin x\, dx + c\right) = -x \cos x + cx$$

۱۲) $f(x) = 2x, \quad q(x) = xe^{-x^2}, \quad g(x) = \int f(x)\, dx = x^2$

$$\Rightarrow y = e^{-x^2}\left(\int x\, dx + c\right) = \left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)e^{x^2}$$

۱۳) $f(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1}, \quad q(x) = 1 + x^2, \quad g(x) = \int f(x)\, dx =$

$$-\ln(x^2 + 1) \Rightarrow y = (x^2 + 1)\left(\int dx + c\right) = (x + c)(x^2 + 1)$$

۱۴) $f(x) = -\frac{2}{x + 1}, \quad q(x) = e^x(1 + x)^2, \quad g(x) = \int f(x)\, dx =$

$$-2\ln(x + 1) \Rightarrow y = (x + 1)^2\left(\int e^x\, dx + c\right) = (x + 1)^2(e^x + c)$$

۱۵) $f(x) = \frac{2}{x}, \quad q(x) = x, \quad g(x) = \int f(x)\, dx = 2\ln x$

$$\Rightarrow y = x^{-2}\left(\int x^3\, dx + c\right) = \frac{x^2}{4} + cx^{-2}$$

$$x = -1, \quad y = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}$$

۱۶) $f(x) = \frac{2}{x}, \quad q(x) = \frac{\cos x}{x^2}, \quad g(x) = \int f(x)\, dx = 2\ln x$

$$\Rightarrow y = x^{-2}\left(\int \cos x\, dx + c\right) = x^{-2}(\sin x + c)$$

$$x = \pi, \quad y = 0 \Rightarrow y = x^{-2}\sin x$$

۱۷) $f(x) = \frac{2}{x}, \quad q(x) = \frac{\ln x}{x^2}, \quad g(x) = \int f(x)\, dx = 2\ln x$

$$\Rightarrow y = x^{-2}\left(\int \frac{\ln x}{x}\, dx + c\right) = x^{-2}\left(\frac{\ln^2 x}{2} + c\right)$$

$$x = 1, \quad y = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2x^2}\left(\ln^2 x + 6\right)$$

۱۸) $f(x) = -2, \quad q(x) = e^x - x, \quad g(x) = \int f(x)\, dx = -2x$

$$\Rightarrow y = e^{2x}\left(\int e^{-2x}(e^x - x)\, dx + c\right) =$$

$$e^{2x}\left(-e^{-x} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{xe^{-2x}}{2} + c\right)$$

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{4} \Rightarrow y = e^{2x} - e^x + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

۱۹) $\frac{dx}{dy} + yx = y$

معادله خطی نسبت به x (تابع x و متغیر y).

$$f(y) = y, \quad q(y) = y, \quad g(y) = \int f(y)\, dy = \frac{y^2}{2}$$

$$\Rightarrow x = e^{-y^2/2}\left(\int ye^{-y^2/2}\, dy + c\right) = 1 + ce^{-y^2/2}$$

۲۰) $\frac{dx}{dy} + 4yx = y$

معادله خطی نسبت به x (تابع x و متغیر y).

$$f(y)=4y,\quad q(y)=y,\quad g(y)=\int f(y)\,dy=2y^2$$

$$\Rightarrow x=e^{-2y^2}\left(\int ye^{-2y^2}\,dy+c\right)=\frac{1}{4}+ce^{-2y^2}$$

۲۱) $\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=y^2$

معادله خطی نسبت به x (تابع x و متغیر y).

$$f(y)=-\frac{1}{y},\quad q(y)=y^2,\quad g(y)=\int f(y)\,dy=-\ln y$$

$$\Rightarrow x=y\left(\int y\,dy+c\right)=cy+\frac{y^3}{2}$$

۲۲) $y'\cos y+\sin y=x,\quad u=\sin y\Rightarrow u'+u=x$

$$f(x)=1,\quad q(x)=x,\quad g(x)=\int f(x)\,dx=x$$

$$\Rightarrow u=\sin y=e^{-x}\left(\int xe^{x}\,dx+c\right)=x-1+ce^{-x}$$

۲۳) $\frac{dx}{dy}+x\frac{y}{1+y^2}=\frac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}}\qquad f(y)=\frac{y}{1+y^2},$

$$q(y)=\frac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}},\quad g(y)=\int f(y)\,dy=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)$$

$$\Rightarrow x=(1+y^2)^{-1/2}\left(\int \cos y\,dy+c\right)\Rightarrow x\sqrt{1+y^2}=c+\sin y$$

۲۴) $y'-\frac{1}{x}y=-y^2\quad\Rightarrow y^{-2}y'-\frac{1}{x}y^{-1}=-1$

$$u=y^{-1},\quad u'=-y^{-2}y'\Rightarrow u'+\frac{1}{x}u=1$$

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad q(x)=1,\quad g(x)=\int f(x)\,dx=\ln x$$

$$\Rightarrow u=e^{-\ln x}\left(\int x\,dx+c\right)=\frac{x}{2}+c\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y=\frac{2x}{x^2+c}$$

۲۵) $y'+\frac{1}{x}y=2y^2\ln x\Rightarrow y^{-2}y'+\frac{1}{x}y^{-1}=2\ln x$

$$u=y^{-1},\quad u'=-y^{-2}y'\quad\Rightarrow u'-\frac{1}{x}u=\frac{-2\ln x}{x}$$

$$f(x)=-\frac{1}{x},\quad q(x)=\frac{-2\ln x}{x},\quad g(x)=\int f(x)\,dx=-\ln x$$

$$\Rightarrow u=e^{\ln x}\left(\int\frac{-2\ln x}{x^2}\,dx+c\right)=-2\ln x-2+cx$$

$$\Rightarrow 1+2y(1+\ln x)=cxy$$

۲۶) $y'-\frac{1}{2x}y=-\frac{1}{2}y^{-1}\Rightarrow 2yy'-\frac{1}{x}y^2=-1$

$$u=y^2,\quad u'=2yy'\Rightarrow u'-\frac{1}{x}u=-1$$

$$f(x)=-\frac{1}{x},\quad q(x)=-1,\quad g(x)=\int f(x)\,dx=-\ln x$$

$$\Rightarrow u=e^{\ln x}\left(-\int\frac{1}{x}\,dx+c\right)=-x\ln x+cx$$

$$\Rightarrow y^2=x\ln\frac{c}{x}$$

۲۷) $y'+4xy=2xe^{-x^2}\sqrt{y}\Rightarrow y'y^{-1/2}+4xy^{1/2}=2xe^{-x^2}$

$$u=y^{1/2},\quad u'=\frac{1}{2}y^{-1/2}y'\Rightarrow u'+2xu=xe^{-x^2}$$

$$f(x)=2x,\quad q(x)=xe^{-x^2},\quad g(x)=\int f(x)\,dx=x^2$$

$$\Rightarrow u=e^{-x^2}\left(\int x\,dx+c\right)=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$$

$$\Rightarrow y=e^{-2x^2}\left(\frac{x^2}{2}+c\right)^2$$

۲۸) $y'-y\tan x=y^4\cos x\Rightarrow y^{-4}y'-y^{-3}\tan x=\cos x$

$$u = y^{-3}, \quad u' = -3y^{-4}y' \Rightarrow u' + 3u\tan x = -3\cos x$$

$$f(x) = 3\tan x, \quad q(x) = -3\cos x, \quad g(x) = \int f(x)\,dx =$$

$$-3\ln\cos x \Rightarrow u = \cos^3 x\left(-3\int \sec^2 x\,dx + c\right) =$$

$$\cos^3 x\,(-3\tan x + c) \Rightarrow y = (c - 3\tan x)^{-1/3}\sec x$$

۲۹) $y' - \frac{x}{2(x^2-1)}y = \frac{x}{2}y^{-1} \Rightarrow 2yy' - \frac{x}{x^2-1}y^2 = x$

$$u = y^2, \quad u' = 2yy' \Rightarrow u' - \frac{x}{x^2-1}u = x$$

$$f(x) = -\frac{x}{x^2-1}, q(x) = x, g(x) = \int f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2-1)$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{x^2-1}\left(\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx + c\right) =$$

$$\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1} + c\right) \Rightarrow y^2 = x^2 - 1 + c\sqrt{x^2-1}$$

۳۰) $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y}x = -\frac{y^2+4}{2y}x^{-1} \Rightarrow 2x\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x^2 = \frac{y^2+4}{y}$

$$u = x^2, \quad \frac{du}{dy} = 2x\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{du}{dy} - \frac{1}{y}u = -\frac{y^2+4}{y}$$

$$f(y) = -\frac{1}{y}, \quad q(y) = -\frac{y^2+4}{y}, \quad g(y) = \int f(y)\,dy = -\ln y$$

$$\Rightarrow u = y\left(\int -\frac{y^2+4}{y^2}\,dy + c\right) = -y^2 + 4 + cy$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4 + cy$$

۳۱) $\frac{dx}{dy} - yx = y^3x^2 \Rightarrow x^{-2}\frac{dx}{dy} - yx^{-1} = y^3$

$$u = x^{-1}, \quad \frac{du}{dy} = -x^{-2}\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{du}{dy} + yu = -y^3$$

$$f(y) = y, \quad q(y) = -y^3, \quad g(y) = \int f(y)\,dy = \frac{1}{2}y^2$$

$$\Rightarrow u = e^{-y^2/2}\left(\int -y^3e^{y^2/2}\,dy + c\right) \Rightarrow \frac{1}{x} = 2 - y^2 + ce^{-y^2/2}$$

۳۲) $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{2y} = -\frac{\sin y}{2y}x^3 \Rightarrow x^{-3}\frac{dx}{dy} - \frac{x^{-2}}{2y} = -\frac{\sin y}{y}$

$$u = x^{-2}, \quad \frac{du}{dy} = -2x^{-3}\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{du}{dy} + \frac{1}{y}u = 2\frac{\sin y}{y}$$

$$\Rightarrow u = x^{-2} = y^{-1}\left(\int \sin y\,dy + c\right) \Rightarrow x^2(c - \cos y) = y$$

۳۳) $2x^{-3}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x^{-2} = -\cos y \Rightarrow u = x^{-2}, \quad \frac{du}{dy} = -2x^{-3}\frac{dx}{dy}$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy} + \frac{1}{y}u = \cos y \Rightarrow$$

$$u = x^{-2} = y^{-1}\left(\int y\cos y\,dy + c\right) \Rightarrow \frac{y}{x^2} = \cos y + y\sin y + c$$

۳۴) $y'e^y + e^y = 4\sin x, \quad u = e^y, \quad u' = y'e^y$

$$\Rightarrow u' + u = 4\sin x \Rightarrow u = e^y = e^{-x}\left(\int 4e^x\sin x\,dx + c\right)$$

$$\Rightarrow e^y = ce^{-x} + 2(\sin x - \cos x)$$

۳۵) $u = \sin y, \quad u' = y'\cos y \Rightarrow u' + xu = 2x$

$$u = \sin y = e^{-x^2/2}\left(\int 2xe^{x^2/2}\,dx + c\right) \Rightarrow \sin y = 2 + ce^{-x^2/2}$$

۳۶) $u = (y+1)^2, \quad u' = 2y'(y+1) \Rightarrow u' - \frac{2}{x}u = x^4$

$$u = (y+1)^2 = x^2\left(\int x^2\,dx + c\right) \Rightarrow (y+1)^2 = \frac{1}{3}x^5 + cx^2$$

۳۷) $y = \sec x + \frac{1}{z}, \quad y' = \sec x\tan x - \frac{z'}{z^2}$

$$\sec x\tan x - \frac{z'}{z} = 2\tan x\sec x - \left(\sec x + \frac{1}{z}\right)^2\sin x \Rightarrow$$

$$z' - 2z\tan x = \sin x \quad z = \sec^2 x\left(\int \cos^2 x\sin x\,dx + c\right) =$$

$$\frac{c-\cos^3 x}{3\cos^2 x} \Rightarrow y = \sec x + \frac{3\cos^2 x}{c-\cos^3 x}$$

۳۸) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}, \quad y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x^2} - \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{zx}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 \Rightarrow z' - \frac{3z}{x} = 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{x}{2}(c - x^2) \Rightarrow y = \frac{1}{x} + \frac{2}{cx^3 - x}$$

۳۹) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}, \quad y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 - \frac{2}{x^2} \Rightarrow z' + \frac{2z}{x} = -1$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{3x^2}(c - x^3) \Rightarrow y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c - x^3}$$

۴۰) $y = 1 - 4x + \frac{1}{z}, \quad y' = -4 - \frac{z'}{z^2}$

$$-4 - \frac{z'}{z^2} = \left(1 - 4x + \frac{1}{z}\right)^2 + 8x\left(1 - 4x + \frac{1}{z}\right) + 16x^2 - 5$$

$$\Rightarrow z' + 2z = -1, \quad z = e^{-2x}\left(-\int e^{2x}\,dx + c\right) = \frac{1}{2}(ce^{2x} - 1)$$

$$y = 1 - 4x + \frac{2e^{2x}}{c - e^{2x}}$$

۶.۲ مجموعه مسائل معادلات مرتبه اول که نسبت به مشتق حل نشده‌اند.

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۱) $y = y'^2 + 4y'^3$ ۲) $y = y'\sqrt{1 + y'^2}$

۳) $y = (y' - 1)e^{y'}$ ۴) $x = y'^3 - y' + 2$

۵) $x = y'\cos y'$ ۶) $x = y'^2 - 2y' + 2$

۷) $x = \frac{1}{1 + y'^2}$ ۸) $x = y' + \sin y'$

۹) $4y = x^2 + y'^2$ ۱۰) $yy'^2 - 2xy' + y = 0$

۱۱) $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$ ۱۲) $y^2y'^2 + 3xy' - y = 0$

۱۳) $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$ ۱۴) $y = xy' - e^{y'}$

۱۵) $y = xy' + \cos y'$ ۱۶) $y = xy' + \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$

۱۷) $y = 2xy' + \frac{1}{y'^2}$ ۱۸) $y = \frac{1}{2}(xy' + y'\ln y')$

۱۹) $y = 2xy' + \sin y'$ ۲۰) $y = xy'^2 - \frac{1}{y'}$

۲۱) $y = x(1 + y') + y'^2$ ۲۲) $y = -xy' + y'^2$

حل مجموعه مسائل ۶.۲

۱) $y' = p, \quad y = p^2 + 4p^3 \Rightarrow dy = p\,dx = 2p(1+6p)\,dp$

$p = 0, \quad dx = 2(1+6p)\,dp \Rightarrow x = 2p + 6p^2 + c$

$\begin{cases} y = p^2 + 4p^3 \\ p = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$ جواب غیر عادی

$\begin{cases} y = p^2 + 4p^3 \\ x = 2p + 6p^2 + c \end{cases}$ جواب عمومی بفرم پارامتری

۲) $y' = p, \quad y = p\sqrt{1+p^2} \Rightarrow p\,dx = \left(\sqrt{1+p^2} + \dfrac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}\right) dp$

$dx = \dfrac{1+2p^2}{p\sqrt{1+p^2}}\,dp, \quad p = 0$

$\begin{cases} y = p\sqrt{1+p^2} \\ p = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$ جواب غیر عادی

$\begin{cases} y = \sqrt{1+p^2} \\ x = 2\sqrt{p^2+1} - \ln(1+\sqrt{p^2+1}) + \ln p + c \end{cases}$ جواب‌عمومی‌بفرم‌پارامتری

۳) $y' = p, \quad y = (p-1)e^p \Rightarrow p\,dx = pe^p\,dp$

$p = 0, \quad x = e^p + c$

$\begin{cases} y = (p-1)e^p \\ p = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -1$ جواب غیر عادی

$\begin{cases} y = (p-1)e^p \\ x = e^p + c \end{cases}$ جواب عمومی بفرم پارامتری

۴) $y' = p, \quad x = p^3 - p + 2 \Rightarrow dx = \dfrac{1}{p}\,dy = (3p^2 - 1)\,dp$

$\Rightarrow dy = (3p^3 - p)\,dp \Rightarrow y = \dfrac{3}{4}p^4 - \dfrac{1}{2}p^2 + c$

$\begin{cases} x = p^3 - p + 2 \\ y = \dfrac{3}{4}p^4 - \dfrac{1}{2}p^2 + c \end{cases}$

۵) $y' = p, \quad x = p\cos p \Rightarrow \dfrac{1}{p}\,dy = (\cos p - p\sin p)\,dp$

$\Rightarrow y = p^2\cos p - p\sin p - \cos p + c$

$\begin{cases} x = p\cos p \\ y = p^2\cos p - p\sin p - \cos p + c \end{cases}$

۶) $y' = p, \quad x = p^2 - 2p + 2 \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{p} = 2(p-1)\,dp$

$\Rightarrow y = \dfrac{2}{3}p^3 - p^2 + c$

$\begin{cases} x = p^2 - 2p + 2 \\ y = \dfrac{2}{3}p^3 - p^2 + c \end{cases}$

۷) $y' = \tan p \Rightarrow x = \dfrac{1}{1+\tan^2 p} = \cos^2 p$

$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \tan p \Rightarrow dx = \cot p\,dy \\ x = \cos^2 p \Rightarrow dx = -2\sin p\cos p\,dp \end{cases}$

$\Rightarrow -2\sin p\cos p\,dp = \cot p\,dy \Rightarrow y = \sin p\cos p - p + c$

$y = \sqrt{x - x^2} + \sin^{-1}\sqrt{x} + c$

۸) $y' = p, \quad x = p + \sin p \Rightarrow dx = \dfrac{1}{p}\,dy = (1+\cos p)\,dp$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{2}p^2 + p\sin p + \cos p + c$

$\begin{cases} x = p + \sin p \\ y = \dfrac{1}{2}p^2 + p\sin p + \cos p + c \end{cases}$

۹) $y' = p, \quad 4y = x^2 + p^2 \Rightarrow 4\,dy = 4p\,dx = 2x\,dx + 2p\,dp$

$p = vx, \quad dp = v\,dx + x\,dv \Rightarrow \dfrac{v}{(v-1)^2}\,dv = -\dfrac{1}{x}\,dx$

$\begin{cases} 4y = x^2 + p^2 \\ \ln(p-x) = c + \dfrac{x}{p-x} \end{cases}$

۱۰) $2x = yp + \frac{y}{p}, \quad 2\,dx = 2\frac{dy}{p} = y\,dp + p\,dy + \frac{y\,dp - p\,dy}{p^2}$

$$\Rightarrow (p^2 - 1)(p\,dy + y\,dp) = 0 \Rightarrow p = \pm 1, \quad \frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = c$$

$$\begin{cases} 2x = yp + \frac{y}{p} \\ p = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow y = \pm x$$ جواب غیر عادی

$$\begin{cases} 2x = yp + \frac{y}{p} \\ py = c \end{cases} \Rightarrow y^2 + c^2 = 2cx$$

۱۱) $y = xy' - \frac{1}{y'} \Rightarrow y = xc - \frac{1}{c}$ کلرو

$$\begin{cases} y = cx - \frac{1}{c} \\ 0 = x + \frac{1}{c^2} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{y^2}{4}$$ جواب غیر عادی

۱۲) $x = \frac{y}{3y'} - \frac{1}{3}y^2 y'$

$$y' = p, \quad x = \frac{y}{3p} - \frac{1}{3}y^2 p \Rightarrow 3\,dx = 3\frac{dy}{p}$$

$$= \frac{y\,dp - p\,dy}{p^2} - 2yp\,dy - y^2\,dp$$

$$\Rightarrow (1 + yp^2)(2p\,dy + y\,dp) = 0, \quad 1 + yp^2 = 0,$$

$$2p\,dy + y\,dp = 0 \Rightarrow py^2 = c$$

$$\begin{cases} x = \frac{y}{3p} - \frac{1}{3}y^2 p \\ 1 + yP^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 9x^2 + 4y^3 = 0$$ جواب غیر عادی

$$\begin{cases} x = \frac{y}{3p} - \frac{1}{3}y^2 p \\ py^2 = c \end{cases} \Rightarrow y^3 - 3xc - c^2 = 0$$

۱۳) $y' = p, \quad y = \frac{1}{2}xp + \frac{2x}{p}$

$$dy = p\,dx = \frac{1}{2}(x\,dp + p\,dx) + 2\frac{p\,dx - x\,dp}{p^2}$$

$$\Rightarrow (p^2 - 4)(p\,dx - x\,dp) = 0 \quad \Rightarrow p = \pm 2, \quad p = cx$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}xp + \frac{2x}{p} \\ p = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 4x^2 = 0$$ جواب غیر عادی

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}xp + \frac{2x}{p} \\ p = cx \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c}$$

۱۴) $y = xc - e^c$ کلرو

$$\begin{cases} y = cx - e^c \\ 0 = x - e^c \end{cases} \Rightarrow y = x(\ln x - 1)$$ جواب غیر عادی

۱۵) $y = xc + \cos c$ کلرو

$$\begin{cases} y = cx + \cos c \\ 0 = x - \sin c \end{cases} \Rightarrow y = x\sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$$ جواب غیر عادی

۱۶) $y = xc + \frac{y}{\sqrt{1 + c^2}}$

$$\begin{cases} y = cx + \frac{y}{\sqrt{1 + c^2}} \\ 0 = x + (1 + c^2)^{-3/2} \end{cases} \Rightarrow x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$ جواب غیر عادی

۱۷) $y' = p, \quad y = 2xp + \frac{1}{p^2}$ لاگرانژ

$$y' = p = 2p + \left(2x - \frac{2}{p^3}\right)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = \frac{2}{p^4}$$

$$f(p) = \frac{2}{p}, \quad q(p) = \frac{2}{p^4}, \quad g(p) = 2\ln p$$

$$x = \frac{1}{p^2}\left(\int \frac{2}{p^2}\,dp + c\right) = p^{-3}(cp - 2)$$

$$\begin{cases} x = p^{-3}(cp - 2) \\ y = 2xp + \frac{1}{p^2} \Rightarrow y = \frac{2c}{p} - \frac{3}{p^2} \end{cases}$$

۱۸) $y' = p, \quad y = \frac{1}{2}(xp + p\ln p)$ لاگرانژ

$$y' = p = \frac{p}{2} + \frac{1}{2}(x + \ln p + 1)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dp} - \frac{x}{p} = \frac{1+\ln p}{p}$$

$$f(p) = -\frac{1}{p}, \quad q(p) = \frac{1+\ln p}{p}, \quad g(p) = -\ln p$$

$$x = p\left(\int \frac{1+\ln p}{p^2}\, dp + c\right) = cp - \ln p - 2$$

$$\begin{cases} x = cp - \ln p - 2 \\ y = \frac{1}{2}cp^2 - p \end{cases}$$

۱۹) $y' = p, \quad y = 2xp + \sin p$ لاگرانژ

$$p = 2p + (2x + \cos p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = \frac{-\cos p}{p}$$

$$x = -\frac{1}{p^2}(\sin p + \cos p - c)$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{p^2}(\sin p + \cos p - c) \\ y = \frac{2c}{p} - \frac{2\cos p}{p} - \sin p \end{cases}$$

۲۰) $y' = p, \quad y = xp^2 - \frac{1}{p}$ لاگرانژ

$$p = p^2 + (2px + p^{-2})\frac{dp}{dx} \Rightarrow p(1-p)\frac{dx}{dp} = 2px + \frac{1}{p^2}$$

$$p = 1, \quad \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{1}{p^2(p-1)}$$

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + c\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{cp^2 + 2p - 1}{2p^2(p-1)^2} \\ y = \frac{cp^2 + 2p - 1}{2(p-1)^2} - \frac{1}{p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = xp^2 - \frac{1}{p} \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow y = x - 1$$ جواب غیرعادی

۲۱) $y' = p, \quad y = x(1+p) + p^2$ لاگرانژ

$$p = 1 + p + (x + 2p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + x = -2p$$

$$x = e^{-p}\left(-\int pe^p\, dp + c\right) = ce^{-p} - 2p + 2$$

$$\begin{cases} x = ce^{-p} - 2p + 2 \\ y = c(1+p)e^{-p} - p^2 + 2 \end{cases}$$

۲۲) $y' = p, \quad y = -xp + p^2$ لاگرانژ

$$p = -p + (-x + 2p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{x}{2p} = 1$$

$$x = p^{-1/2}\left(\int p^{1/2}\, dp + c\right) = \frac{c}{\sqrt{p}} + \frac{2p}{3}$$

$$\begin{cases} 3x = 2p + \frac{c}{\sqrt{p}} \\ 3y = p^2 - c\sqrt{p} \end{cases}$$

مجموعه مسائل روش تکرار پیکارد، ۷.۲

با استفاده از روش تکرار پیکارد، معادلات زیر را حل کنید.

۱) $y' = y^2 + 4, \quad y(0) = 0$

۲) $y' = x + y, \quad y(0) = 1$

۳) $y' = 2x(1+y), \quad y(0) = 0$

۴) $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$

۵) $y' = x - y, \quad y(0) = 1$

۶) $y' = x^2 + y, \quad y(1) = 3$

۷) $y' = x + y^2, \quad y(0) = 0$

۸) $y' = 1 + xy, \quad y(1) = 2$

۹) $y' = e^x + y, \quad y(0) = 0$

۱۰) $y' = x^2 - y, \quad y(1) = 2$

حل مجموعه مسائل ۷.۲

۱)
$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_0)\, dS = \int_0^x 4\, dS = 4x$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_1(S))\, dS = \int_0^x (16S^2 + 4)\, dS = \frac{16}{3}x^3 + 4x$$

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_2(S))\, dS = \int_0^x \left((\frac{16}{3}S^3 + 4S)^2 + 4 \right) dS = \frac{16 \times 16}{9 \times 7}x^7 + \frac{16 \times 8}{5 \times 3}x^5 + \frac{16}{3}x^3 + 4x$$

با توجه به بسط مک لورن تابع $\tan x$ دنباله جوابهابه $y = 2\tan 2x$ وهمگرااست.

۲)
$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_0)\, dS = 1 + \int_0^x (S+1)\, dS = \frac{1}{2}x^2 + x$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x (S + \frac{1}{2}S^2 + S)\, dS$$

$$= 1 + \int_0^x (S + \frac{1}{2}S^2 + S)\, dS = \frac{1}{2 \times 3}x^3 + x^2$$

$$y_3 = 1 + \int_0^x (S + \frac{1}{2 \times 3}S^3 + S^2)\, dS = \frac{1}{2 \times 3 \times 4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

با اضافه و کم کردن $x + 1$ دنباله جوابها به $y = 2e^x - x - 1$ همگرا است.

۳)
$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_0)\, dS$$

$$= \int_{۰}^{x} ۲S\, dS = x^{۲}$$

$$y_{۲} = \int_{۰}^{x} ۲S(۱ + S^{۲})\, dS = x^{۲} + \frac{۱}{۲}x^{۴}$$

$$y_{۳} = \int_{۰}^{x} ۲S(۱ + S^{۲} + \frac{۱}{۲}S^{۴})\, dS = x^{۲} + \frac{۱}{۲}x^{۴} + \frac{۱}{۶}x^{۶}$$

دنباله جوابها به $y = e^{x^{۲}} - ۱$ همگرا است.

$$۴)\ y_{۱} = y_{۰} + \int_{x_{۰}}^{x} f(S, y_{۰})\, dS$$

$$= \int_{۰}^{x} dS = x$$

$$y_{۲} = \int_{۰}^{x} (۱ + S^{۲})\, dS = x + \frac{۱}{۳}x^{۳}$$

$$y_{۳} = \int_{۰}^{x} \left(۱ + \left(S + \frac{۱}{۳}S^{۳}\right)^{۲}\right) dS =$$

$$x + \frac{۱}{۳}x^{۳} + \frac{۱}{۶۳}x^{۷} + \frac{۲}{۱۵}x^{۵}$$

دنباله جوابها به $y = \tan x$ همگرا است.

$$۷)\ y_{۱} = y_{۰} + \int_{x_{۰}}^{x} f(S, y_{۰})\, dS$$

$$= \int_{۰}^{x} S\, dS = \frac{۱}{۲}x^{۲}$$

$$y_{۲} = \int_{۰}^{x} \left(S + \frac{۱}{۴}S^{۴}\right) dS = \frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۱}{۵}x^{۵}$$

$$y_{۳} = \int_{۰}^{x} \left(S + \left(\frac{۱}{۲}S^{۲} + \frac{۱}{۵}S^{۵}\right)^{۲}\right) dS =$$

$$\frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۱}{۲۰}x^{۵} + \frac{۱}{۱۶۰}x^{۸} + \frac{۱}{۴۴۰۰}x^{۱۱}$$

$$۸)\ y_{۱} = y_{۰} + \int_{x_{۰}}^{x} f(S, y_{۰})\, dS$$

$$= ۲ + \int_{۱}^{x} (۱ + ۲S)\, dS = x^{۲} + x$$

$$y_{۲} = ۲ + \int_{۱}^{x} \left(۱ + S(S^{۲} + S)\right) dS = \frac{۱}{۴}x^{۴}$$

$$+ \frac{۱}{۳}x^{۳} + x + \frac{۵}{۱۲}$$

$$y_{۳} = ۲ + \int_{۱}^{x} \left(۱ + S\left(\frac{۱}{۴}S^{۴} + \frac{۱}{۳}S^{۳} + S + \frac{۵}{۱۲}\right)\right) dS =$$

$$\frac{۱}{۲۴}x^{۶} + \frac{۱}{۱۵}x^{۵} + \frac{۱}{۳}x^{۳} + \frac{۵}{۲۴}x^{۲} + x + \frac{۷}{۲۰}$$

$$۹)\ y_{۱} = y_{۰} + \int_{x_{۰}}^{x} f(S, y_{۰})\, dS$$

$$= \int_{۰}^{x} e^{S}\, dS = e^{x} - ۱$$

$$y_{۲} = \int_{۰}^{x} (۲e^{S} - ۱)\, dS = ۲e^{x} - x - ۲$$

$$y_{۳} = \int_{۰}^{x} \left(۳e^{S} - S - ۲\right) dS = ۳e^{x} - \frac{۱}{۲}x^{۲} - ۲x - ۳$$

$$y_{۴} = = \int_{۰}^{x} \left(۴e^{S} - \frac{۱}{۲}S^{۲} - ۲S - ۳\right) ds =$$

$$۴e^{x} - \frac{۱}{۶}x^{۳} - x^{۲} - ۳x - ۴$$

$$۱۰)\ y_{۱} = y_{۰} + \int_{x_{۰}}^{x} f(S, y_{۰})\, dS$$

$$= ۲ + \int_{۱}^{x} (S^{۲} - ۲)\, dS = \frac{۱}{۳}x^{۳} - ۲x + \frac{۱۱}{۳}$$

$$y_{۲} = ۲ + \int_{۱}^{x} \left(S^{۲} - \frac{۱}{۳}S^{۳} - ۲S + \frac{۱۱}{۳}\right) dS =$$

$$\frac{۱}{۳}x^{۳} - \frac{۱}{۱۲}x^{۴} + x^{۲} - \frac{۱۱}{۳}x + \frac{۵۳}{۱۲}$$

مجموعه مسائل دوره‌ای، ۸.۲

۱) $y' = (x-y)^2 + 1$

۲) $y'x\sin x + y(\sin x - x\cos x) = \sin x\cos x - x$

۳) $(5xy - 4y^2 - 6x^2)\,dx + (y^2 - 2xy + 6x^2)\,dy = 0$

۴) $(x - y + 3)\,dx + (3x + y + 1)\,dy = 0$

۵) $(1+e^x)\,yy' = e^x,\quad y(0) = 1$

۶) $y'\sin x = y\ln y,\quad y(\pi/2) = e$

۷) $y + xy' = a(1+xy),\quad y(1/a) = -a$

۸) $y^2\sin x\,dx + \cos^2 x\ln y\,dy = 0$ ۹) $xy' = y + x\cos^2\frac{y}{x}$

۱۰) $xy' = y(\ln y - \ln x)$ ۱۱) $x + y - 2 + (1-x)y' = 0$

۱۲) $2x + 3y - 5 + (3x + 2y - 5)y' = 0$ ۱۳) $2xy'(x - y^2) + y^3 = 0$

۱۴) $4y^6 + x^3 = 6xy^5y'$ ۱۵) $y'\cos x - y\sin x = 2x,\quad y(0) = 0$

۱۶) $y'x\ln x - y = 3x^3\ln^2 x$ ۱۷) $(2x - y^2)y' = 2y$

۱۸) $y' + \sin y + x\cos y + x = 0$ ۱۹) $2y'\ln x + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{y}$

۲۰) $2y'\sin x + y\cos x = y^3\sin^2 x$ ۲۱) $y' - \tan y = \frac{e^x}{\cos y}$

۲۲) $y' = y(e^x + \ln y)$ ۲۳) $\left(y + \frac{2}{x^2}\right)dx + \left(x - \frac{3}{y^2}\right)dy = 0$

۲۴) $\left(2x + e^{x/y}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{x/y}\,dy = 0$

۲۵) $2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2\sin 2y)\,dy = 0$

۲۶) $\left(\sin y - y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y + \cos x - \frac{1}{y}\right)dy = 0$

۲۷) $(y^2 - 3xy - 2x^2)\,dx + (xy - x^2)\,dy = 0$

۲۸) $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

۲۹) $(2xy^2 - 3y^3)\,dx + (7 - 3xy^2)\,dy = 0$

۳۰) $y'^2 - yy' + e^x = 0$ ۳۱) $y'^2 - 4xy' + 2y + 2x^2 = 0$

۳۲) $y = x\frac{1 + y'^2}{2y'}$ ۳۳) $y = xy' - \frac{1}{y'}$

۳۴) $y = xy' + y' + \sqrt{y'}$ ۳۵) $y = -xy' + x^4y'^2$

۳۶) $y(3 - 4y)^2y'^2 = 4(1 - y)$ ۳۷) $y = (1 + y')x + y'^2$

۳۸) معادله منحنی را پیدا کنید که از نقطه (۱ و ۱) گذ شته و ضریب زاویه خط مماس در هر نقطه متناسب با مربع عرض نقطه تماس باشد.

۳۹) معادله منحنی را پیدا کنید که از نقطه (۲ـ و ۰) گذ شته و ضریب زاویه خط مماس در هر نقطه، سه واحد بیش از عرض نقطه تماس باشد.

مسیرهای قائم منحنی های زیر را پیداکنید.

۴۰) $y^2 = 4(x - a)$ ۴۱) $x^2 - y^2 = c$

۴۲) $x^2 + y^2 = 2cx$ ۴۳) $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$

حل مجموعه مسائل ۸.۲

$$1)\ u = x - y,\quad u' = 1 - y,\quad 1 - u' = u^2 + 1$$

$$-\frac{du}{u^2} = dx \Rightarrow \frac{1}{x-y} = x + c$$

$$2)\ y' + y\left(\frac{1}{x} - \cot x\right) = \frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\sin x}$$ خطی مرتبه اول

$$y = \cos x + cx^{-1}\sin x$$

۳) معادله همگن است.

$$(5x^2v - 4v^2x^2 - 6x^2)\,dx + (v^2x^2 - 2x^2v + 6x^2)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{v^2 - 2v + 6}{v^3 - 6v^2 + 11v - 6}\,dv = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{5}{2}\ln(v-1)$$

$$+6\ln(v-2) - \frac{9}{2}\ln(v-3) + \ln c \Rightarrow (y-x)^5(y-3x)^9 = c(y-2x)^{12}$$

۴) (۲و۱ـ) نقطه برخورد دو خط می باشد، لذا از تغییر متغیر $x = X - 1$ و $y = Y + 2$ استفاده می کنیم.

$$(X - Y)\,dX + (3X + Y)\,dy = 0 \Rightarrow$$

$$X(1 - v)\,dX + X(3 + v)(v\,dX + X\,dv) = 0$$

$$\frac{dX}{X} + \frac{v+3}{(v+1)^2}\,dv = 0 \Rightarrow \ln(Y + X) = \frac{2X}{Y + X} + c$$

$$\Rightarrow x + y - 1 = ce^{(2x+2)/(x+y-1)}$$

$$5)\ y\,dy = \frac{e^x}{1 + e^x}\,dx \Rightarrow y^2 = \ln(e^x + 1)^2 + c$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c = 1 - 2\ln 2,\quad y = \left(1 + \ln\frac{(1 + e^x)^2}{4}\right)^{1/2}$$

$$6)\ \frac{dx}{\sin x} = \frac{dy}{y\ln y} \Rightarrow \tan\frac{x}{2} = \ln cy,$$

$$y(\pi/2) = e \Rightarrow c = 1,\quad y = e^{\tan x/2}$$

$$7)\ y' + y\frac{1 - ax}{x} = \frac{a}{x} \Rightarrow y = \frac{e^{ax}}{x}\left(\int ae^{-ax}\,dx + c\right)$$

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{c}{x}e^{ax},\quad y(1/a) = -a \Rightarrow c = 0,\quad y = -\frac{1}{x}$$

$$8)\ \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx + \frac{\ln y}{y^2}\,dy = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} - \frac{\ln y + 1}{y} = c \Rightarrow$$

$$y = (1 + cy + \ln y)\cos y$$

۹) معادله همگن است.

$$v\,dx + x\,dv = (v + \cos^2 v)\,dx \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{\cos^2 v}$$

$$\Rightarrow \tan v = \ln cx \Rightarrow \tan\frac{y}{x} = \ln cx$$

۱۰) معادله همگن است.

$$v + x\frac{dv}{dx} = v\ln v \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(\ln v - 1)}$$

$$\Rightarrow \ln x + \ln c = \ln(\ln v - 1) \Rightarrow cx + 1 = \ln v \Rightarrow y = xe^{1+cx}$$

۱۱) (۱و۱) نقطه برخورد دو خط می باشد، لذا از تغییر متغیر $x = X + 1$ و $y = Y + 1$ استفاده می کنیم.

$$(X + Y)\,dX - X\,dY = 0 \Rightarrow (1 + v)\,dX = v\,dX + X\,dv \Rightarrow \frac{dX}{X} = dv$$

$$\ln cX = v \Rightarrow y = 1 + (x - 1)\ln c(x - 1)$$

۱۲) (۱و۱) نقطه برخورد دو خط می باشد، لذا از تغییر متغیر $x = X + 1$ و $y = Y + 1$ استفاده می کنیم.

$$(2X + 3Y)\,dX + (3X + 2Y)\,dY = 0 \Rightarrow$$

$$(2+3v)\,dX + (3+2v)(v\,dX + X\,dv) = 0$$

$$2(v^2+3v+1)\,dx + X(3+2v)\,dv = 0 \Rightarrow \frac{dX}{X} + \frac{3+2v}{2(v^2+3v+1)}\,dv = 0$$

$$2\ln X + \ln(v^2+3v+1) = \ln c \Rightarrow y^2 + 3xy + x^2 - 5x - 5y = c$$

۱۳) $y' = -\dfrac{y^3}{2x^2 - 2xy^2} \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} - \dfrac{2}{y}x = -\dfrac{2}{y^3}x^2$

$$x^{-2}\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x^{-1} = -\frac{2}{y^3}, \quad u = x^{-1},$$

$$\frac{du}{dy} = -x^{-2}\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{du}{dy} + \frac{2}{y}u = \frac{2}{y^3} \Rightarrow u = \frac{1}{y^2}\left(\int \frac{2}{y}\,dy + c\right)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y^2}(\ln y^2 + \ln c) \Rightarrow y^2 = x\ln cy^2$$

۱۴) $y' - \dfrac{2}{3x}y = \dfrac{x^2}{6}y^{-5} \Rightarrow y^5y' - \dfrac{2}{3x}y^6 = \dfrac{x^2}{6}$

$$u = y^6, \quad u' = 6y^5y', \quad u' - \frac{4}{x}u = x^2$$

$$u = y^6 = x^4\left(\int x^{-2}\,dx + c\right) \Rightarrow cx^4 = y^6 + x^3$$

۱۵) $y' - y\tan x = \dfrac{2x}{\cos x} \Rightarrow y = \sec x\left(\int 2x\,dx + c\right)$

$$y = \sec x(x^2 + c), \quad y(0) = 0 \Rightarrow c = 0, \quad y = \frac{x^2}{\cos x}$$

۱۶) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = 3x^2\ln x \quad f(x) = -\dfrac{1}{x\ln x}, \quad g(x) = -\ln(\ln x)$

$$\Rightarrow y = \ln x\left(\int 3x^2\,dx + c\right) \Rightarrow y = (c + x^3)\ln x$$

۱۷) $\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{x}{y} = -\dfrac{y}{2} \Rightarrow x = y\left(-\dfrac{1}{2}\int dy + c\right) = cx - \dfrac{y^2}{2}$

۱۸) $\tan\dfrac{y}{2} = z, \quad y' = \dfrac{2z'}{1+z^2}$

$$\Rightarrow z' + z = -x \Rightarrow z = e^{-x}\left(-\int xe^x\,dx + c\right)$$

$$\Rightarrow \tan\frac{y}{2} = 1 - x + ce^{-x}$$

۱۹) معادله برنولی است.

$$2yy' + \frac{y^2}{x\ln x} = \frac{\cos x}{\ln x}, \quad u = y^2, \quad u' = 2yy'$$

$$\Rightarrow u' + \frac{u}{x\ln x} = \frac{\cos x}{\ln x} \Rightarrow u = \frac{1}{\ln x}\left(\int \cos x\,dx + c\right)$$

$$\Rightarrow y^2\ln x = c + \sin x$$

۲۰) معادله برنولی است.

$$2y^{-3}y' + y^{-2}\cot x = \sin x, \quad u = y^{-2}, \quad u' = -2y^{-3}y'$$

$$\Rightarrow u' - u\cot x = -\sin x \Rightarrow u = \sin x\left(-\int dx + c\right)$$

$$\Rightarrow y^2(c - x)\sin x = 1$$

۲۱) $y'\cos y - \sin y = e^x, \quad u = \sin y, \quad u' = y'\cos y$

$$\Rightarrow u' - u = e^x \Rightarrow u = e^x\left(\int dx + c\right)$$

$$\Rightarrow \sin y = (x + c)e^x$$

۲۲) $u = \ln y, \quad u' = \dfrac{y'}{y} \Rightarrow u' - u = e^x$

$$\Rightarrow \ln y = (x + c)e^x$$

۲۳) معادله دیفرانسیل کامل است.

$$P = \left(y + \frac{2}{x^2}\right), \quad Q = \left(x - \frac{3}{y^2}\right)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = u = \int (y + \frac{2}{x^2})\,dx + f(y)$$

$$\Rightarrow u = xy - \frac{2}{x} + f(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$x + f'(y) = x - \frac{3}{y^2} \Rightarrow f(y) = 3y^{-1}$$

$$\Rightarrow u = xy - \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = c$$

۲۴) معادله دیفرانسیل کامل است.

$$P = \left(2x + e^{x/y}\right), \quad Q = \left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{x/y}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = u = \int (2x + e^{x/y})\,dx + f(y)$$

$$\Rightarrow u = x^2 + ye^{x/y} + f(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$e^{x/y} - \frac{x}{y}e^{x/y} + f'(y) = Q$$

$$\Rightarrow f(y) = c_1 \Rightarrow u = x^2 + ye^{x/y} = c$$

۲۵) معادله دیفرانسیل کامل است.

$$P = 2x\cos^2 y, \quad Q = \left(2y - x^2\sin 2y\right)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = u = \int 2x\cos^2 y\,dx + f(y)$$

$$\Rightarrow u = x^2\cos^2 y + f(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$-x^2\sin 2y + f'(y) = Q \Rightarrow f(y) = y^2$$

$$\Rightarrow u = x^2\cos^2 y + y^2 = c$$

۲۶) معادله دیفرانسیل کامل است.

$$P = \sin y - y\sin x + \frac{1}{x}, \quad Q = x\cos y + \cos x - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = u = x\sin y + y\cos x + \ln x + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = x\cos y + \cos x + f'(y) = Q$$

$$\Rightarrow f(y) = -\ln y \Rightarrow u = x\sin y + y\cos x + \ln x - \ln y = c$$

۲۷) $y = vx, \quad dy = v\,dx + x\,dv$

$$(v^2 - 3v - 2)\,dx + (v-1)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$\Rightarrow 2(v^2 - 2v - 1)\,dx + (v-1)x\,dv = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x}\,dx + \frac{v-1}{v^2 - 2v - 1}\,dv = 0 \Rightarrow \ln x^2$$

$$+\frac{1}{2}\ln(v^2 - 2v - 1) = \ln c \Rightarrow x^2y^2 - 2x^3y - x^4 = c$$

۲۸) $P = (x - y^2), \quad Q = 2xy,$

$$\Rightarrow \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{-2}{x} \Rightarrow F = e^{\int \frac{-2}{x}\,dx} = \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{2y}{x}\,dy = 0, \quad \Rightarrow u(x,y) = u = \int \frac{2y}{x}\,dy + f(x)$$

$$\Rightarrow u = \frac{y^2}{x} + f(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^2}{x^2} + f'(x) = P$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln x \Rightarrow y^2 + x\ln x = cx$$

۲۹) $P = 2xy^2 - 3y^3, \quad Q = 7 - 3xy^2,$

$$\Rightarrow \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2}{y}$$

$$\Rightarrow F = e^{\int -\frac{2}{y}\,dx} = \frac{1}{y^2}$$

$$(2x - 3y)\,dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right)dy = 0, \Rightarrow u(x,y) = u =$$

$$\int (2x - 3y)\,dx + f(y) \Rightarrow u = x^2 - 3yx + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -3x + f'(y) = Q \Rightarrow f(y) = \frac{-7}{y} \Rightarrow x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = c$$

۳۰) $y' = p, \quad y = p + \frac{e^x}{p}$

$y' = p\,dx = dp + \frac{e^x p\,dx - e^x\,dp}{p^2} \Rightarrow (p^2 - e^x)(dp - p\,dx) = 0$

$p = \pm e^{x/2} \Rightarrow y = \pm(e^{x/2} + e^{x/2}) = \pm 2e^{x/2}$ جواب غیر عادی

$dp - p\,dx = 0 \Rightarrow p = ce^x, \Rightarrow y = ce^x + c^{-1}$ جواب عمومی

۳۱) $y' = p, \quad y = -\frac{p^2}{2} + 2px - x^2$

$y' = p\,dx = -p\,dp + 2p\,dx + 2x\,dp - 2x\,dx \Rightarrow$

$(p - 2x)(dx - dp) = 0, p = 2x \Rightarrow y = x^2$ جواب غیرعادی

$dp - dx = 0 \Rightarrow p = x + c \Rightarrow y = cx + \frac{1}{2}(x^2 - c^2)$ جواب عمومی

۳۲) $y' = p, \quad y = x\frac{1 + p^2}{2p}$

$y' = p\,dx = \frac{1 + p^2}{2p}\,dx + x\frac{2p^2 - 2}{4p^2}\,dp$

$\Rightarrow \left(\frac{p^2 - 1}{2p^2}\right)(x\,dp - p\,dx) = 0$

$p = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x$ جواب غیر عادی

$x\,dp - p\,dx = 0 \Rightarrow p = xc \Rightarrow y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2c}$ جواب عمومی

۳۳) معادله کلرو می باشد.

$y = cx - \frac{1}{c}$ جواب عمومی

با حذف c بین جواب عمومی و مشتق آن نسبت به c، جواب غیرعادی بدست می آید.

$$\begin{cases} y = cx - \frac{1}{c} \\ 0 = x + \frac{1}{c^2} \end{cases} \Rightarrow y^2 = -4x$$ جواب غیر عادی

۳۴) معادله کلرو می‌باشد.

$y = cx + c + \sqrt{c}$ جواب عمومی

با حذف c بین جواب عمومی و مشتق آن نسبت به c، جواب غیرعادی بدست می آید.

$$\begin{cases} y = cx + c + \sqrt{c} \\ 0 = x + 1 + \frac{1}{2\sqrt{c}} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{4(x+1)}$$ جواب غیر عادی

۳۵) $y = -xp + x^2p^2, \ p\,dx = -p\,dx - x\,dp + 4x^3p^2\,dx + 2px^4\,dp$

$(2px^3 - 1)(2p\,dx + x\,dp) = 0, \quad 2px^3 - 1 = 0$

$\Rightarrow p = \frac{1}{2x^3} \Rightarrow y = \frac{-1}{4x^2}$ جواب غیر عادی

$2p\,dx + x\,dp = 0 \Rightarrow p = \frac{c}{x^2}$

$y = -\frac{c}{x} + c^2$ جواب عمومی

۳۶) $y' = \pm\frac{2\sqrt{1-y}}{(3-4y)\sqrt{y}}, \quad \frac{(3-4y)\sqrt{y}}{\sqrt{1-y}}\,dy = 2\,dx$

$y = \sin^2 t \Rightarrow \int 2\sin^2 t(3 - 4\sin^2 t)\,dt = 2\,dx$

$$(x+c)^2 = y^3(1-y), \quad y = 1$$

۳۷) معادله لاگرانژ می باشد.

$y = (1+p)x + p^2, \quad y' = p = 1 + p + (x + 2p)\frac{dp}{dx}$

$\frac{dx}{dp} + x = -2p$ خطی مرتبه اول

$x = e^{-p}\left(\int -2pe^p\,dp + c\right) = e^{-p}(2(1-p)e^p + c)$

$$\begin{cases} x = ce^{-p} - 2p + 2 \\ y = c(1+p)e^{-p} - p^2 + 2 \end{cases}$$

۳۸) $y' = ky^2, \quad y^{-2}\, dy = k\, dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = kx + c$

$y(1) = 1, \quad c = -1 - k, \quad k(x-1)y - y + 1 = 0$

۳۹) $y' = 3 + y, \quad \frac{dy}{3+y} = dx \Rightarrow \ln(3+y) = x + c, \quad y = ce^x - 3$

$y(0) = -2, \quad c = 1, \quad y = e^x - 3$

۴۰) $2yy' = 4, \quad 2y\frac{-1}{y'} = 4$ معادله مسیرقائم

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{2} \Rightarrow \ln y = -\frac{x}{2} + c, \quad y = ce^{-x/2}$

۴۱) $yy' = x, \quad y\frac{-1}{y'} = x$ معادله مسیرقائم

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow y = \frac{c}{x}$

۴۲) $\begin{cases} x + yy' = c \\ x^2 + y^2 = 2cx \end{cases} \quad x^2 + y^2 = 2x(x + yy')$

$y^2 - x^2 = 2xy\frac{-1}{y'}$ معادله مسیرقائم

$(y^2 - x^2)\, dy + 2xy\, dx = 0, \quad x^2 + y^2 = cy$

۴۳) ابتدا معادله را بفرم $\frac{x^3}{y^2} = 2a - x$ می‌نویسیم و سپس مشتق می گیریم.

$3x^2y^{-2} - 2y^{-3}x^3y' = -1, \quad 3x^2y - 2x^3\frac{-1}{y'} = -y^3$ معادله مسیرقائم

$(3x^2y + y^3)\, dy + 2x^3\, dx = 0, \quad (y^2 + x^2)^2 = c(y^2 + 2x^2)$

مسائل تکمیلی

معادلات زیر را حل کنید.

۱) $4x\, dy - y\, dx = x^2\, dy$ ۲) $x(y-3)\, dy = 4y\, dx$

۳) $(1 + x^3)\, dy - x_y^2\, dx = 0, \quad y(1) =.2$

۴) $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$

۵) $y' = \sin(x - y)$ ۶) $(x+y)^2y' = 9$

۷) $y' = (x - y + 1)^2 + x - y$ ۸) $y' = e^{2x+y-1} - 2$

۹) $y^2(1 - x^2)^{1/2}\, dy = \sin^{-1} x\, dx$ ۱۰) $y' = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4}$

۱۱) $y' = \frac{3y + x - 5}{x - y - 1}$

۱۲) $(2x \sinh\frac{y}{x} + 3y\cosh\frac{y}{x})\, dx - 3x\cosh\frac{y}{x}\, dx = 0$

۱۳) معادلاتی بفرم $yf_1(xy) + xf_2(xy) = 0$ با تغییر متغیر $xy = v, \ dy = \frac{x\, dv - v\, dx}{x^2}$ تبدیل به نوع جدا از هم می شود. معادلات زیر را حل کنید.

$a)$ $y(xy + 1)\, dx + x(1 + xy + x^2y^2)\, dy = 0$

$b)$ $(1 - xy + x^2y^2)\, dx + (x^3y - x^2)\, dy = 0$

۱۴) $\tan^2(x + y)\, dx - dy = 0$ ۱۵) $(x^2y^2 - 1)\, dy + 2xy^3\, dx = 0$

۱۶) معادلات زیر را بااستفاده از تغییرمتغیر داده شده حل کنید.

$a)$ $(2 + 2x^2y^{1/2})y\, dx + (2 + x^2y^{1/2})x\, dy = 0, \quad x^2y^{1/2} = t$

$b)$ $(2x^2 + 3y^2 - 7)x\, dx - (3x^2 + 2y^2 - 8)y\, dy = 0, \ x^2 = u, y^2 = v$

$c)$ $(x^2 - 2\sin y + 3)x dx + (2x^2 - 4\sin y - 3)\cos y\, dy = 0,$

$u = x^2, \quad v = \sin y$

d) $4x^2 yy' = 3x(3y^2+2) + 2(3y^2+2)^3, \quad z = 3y^2+2$

e) $(xy^3 - y^3 - x^2 e^x)\, dx + 3xy^2\, dy = 0, \quad y^3 = zx$

۱۷) $(2xy^4 e^y + 2xy^3 + y)\, dx + (x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 3x)\, dy = 0$

۱۸) $(2x^3 y^2 + 4x^2 y + 2xy^2 + xy^4 + 2y)\, dx + 2(y^3 + x^2 y + x)\, dy = 0$

۱۹) وجود بعضی از عوامل در معادله دیفرانسیل، اشاره به فاکتورانتگرال خاصی دارند. بعنوان مثال وجود عامل $x\,dy - y\,dx$ اشاره به فاکتور انتگرالهای

$$\frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{y^2}, \quad \frac{1}{xy}, \quad \frac{1}{x^2+y^2}$$

دارد، زیرا $d(\frac{y}{x}) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$ و $d(-\frac{x}{y}) = \frac{x\,dy - y\,dx}{y^2}$ و $d(\ln\frac{y}{x}) = \frac{x\,dy - y\,dx}{xy}$ و $d(\tan^{-1}\frac{y}{x}) = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$. همچنین وجود عامل $x\,dy + y\,dx$ اشاره به فاکتور انتگرال $\frac{1}{(xy)^n}$ و وجود عامل $x\,dx + y\,dy$ اشاره به فاکتور انتگرال $\frac{1}{(x^2+y^2)^n}$ دارد. زیرا $d(\ln(xy)) = \frac{x\,dy + y\,dx}{xy}$ و

$$d\frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2)) = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}, \quad n = 1$$

$$d\left(\frac{-1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}}\right) = \frac{x\,dx + y\,dy}{(x^2+y^2)^n}, \quad n \neq 1$$

معادلات زیر را حل کنید.

a) $(2xy^2 + y)\, dx + (x + 2x^2 y - x^4 y^3)\, dy = 0$

b) $y\, dx + x(1 - 3x^2 y^2)\, dy = 0$ c) $x\, dx + y\, dy + 4y^3(x^2+y^2)\, dy = 0$

d) $xdy - ydx = (1 - x^2)\, dx$ e) $xdx + ydy + (x^2+y^2)\, dx = 0$

f) $(x^3 + xy^2 - y)\, dx + (y^3 + yx2 + x)\, dy = 0$

۲۰) $(4xy + 3y^4)\, dx + (2x^2 + 5xy^3\, dy = 0$

۲۱) $(4x^2 y^4 + 8y)\, dx + (5x^3 y^3 + 8x)\, dy = 0$

۲۲) $\frac{y + \sin x \cos^2 xy}{\cos^2 xy}\, dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y\right)\, dy = 0$

۲۳) $\frac{x\, dx + y\, dy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2} = 0$

۲۴) $2xy \ln y\, dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\, dy = 0$

۲۵) $(1 - x^2 y)\, dx + x^2(y - x)\, dy = 0$

۲۶) $\left(e^{-y^2/2} - xy\right)\, dy - dx = 0$

۲۷) $y' - y \ln 2 = 2^{\sin x}(\cos x - 1) \ln 2$

۲۸) معادلات زیر را با گرفتن مشتق ازطرفین حل کنید.

a) $\int_0^x ty(t)\, dt = x^2 y(x)$ b) $\int_a^x ty(t)\, dt = x^2 + y(x)$

c) $y(x) = \int_0^x y(t)\, dt + e^x$ d) $\int_0^1 y(xt)\, dt = ny(x)$

۲۹) $3xy^2 y' - 2y^3 = x^3$ ۳۰) $(x^3 + e^y)y' = 3x^2$

۳۱) $yy' + 1 = (x - 1)e^{-y^2/2}$

۳۲) $y' + x \sin 2y = 2xe^{-x^2} \cos^2 y$

۳۳) $y' \sin y = \cos x(2 \cos y - \sin^2 x)$ ۳۴) $y' \sin y = \cos y(1 - x \cos y)$

۳۵) $2\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} + x^3 \cos y = 0$

۳۶) $(x^2 + x)y'^2 + (x^2 + x - 2xy - y)y' + y^2 - xy = 0$

۳۷) $y = xy' + y'^3$ ۳۸) $y = 3xy' + 6y^2 y'^2$

۳۹) $(x^2 - 4)y'^2 - 2xyy' - x^2 =$ ۴۰) $4xy'^2 - (3x - 1)^2 = 0$

۴۱) $9yy'^2 + 4 = 0$ ۴۲) $x^3 y'^2 + x^2 yy' + 1 = 0$

جواب مسائل تکمیلی

۱) $(x-4)y^4 = cx$ ۲) $x^4y^3 = ce^y$

۳) $y^3 = 4(1+x^3)$ ۴) $\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2} = c$

۵) $x+c = \cot\left(\frac{y-x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ ۶) $x+y = 3\tan(c+y/3)$

۷) $y = x+1-\frac{1+2ce^{-3x}}{1-ce^{-3x}}$ ۸) $y = 1-2x-\ln|c-x|$

۹) $2y^3-3(\sin^{-1}x)^2 = c$ ۱۰) $(y-x+3) = c(y+x+1)^3$

۱۱) $\frac{4-2x}{x+y-3} = \ln c|x+y-3|$ ۱۲) $x^2 = c\sinh^3\frac{y}{x}$

۱۳) a) $2x^2y^2\ln y-2xy-1 = cx^2y^2$ b) $\ln x = xy-\frac{1}{2}x^2y^2+c$

۱۴) $2(x-y) = c+\sin 2(x+y)$ ۱۵) $\alpha = -1,\quad 1+x^2y^2 = cy$

۱۶) a) $xy(x^2y^{1/2}+3) = c$ b) $(x^2-y^2-1)^3 = c(x^2+y^2-3)$

c) $2(x^2-2\sin y)-3\ln|x^2-2\sin y| = 3x^2+c$

d) $4x^9 = (c-3x^8)(3y^2+2)^2$ e) $2y^3e^x = xe^{2x}+cx$

۱۷) $F = \frac{1}{y^4},\quad x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3} = c$

۱۸) $F = e^{x^2},\quad (2x^2y^2+4xy+y^4)e^{x^2} = c$

۱۹) a) $F = \frac{1}{(xy)^4},\quad \ln y+\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{3x^3y^3} = c$

b) $F = \frac{1}{(xy)^3},\quad y^6 = ce^{-1/(x^2y^2)}$

c) $F = \frac{1}{x^2+y^2},\quad (x^2+y^2)e^{2y^2} = c$

d) $F = \frac{1}{x^2},\quad y+x^2+1 = cx$

۴۳) $y'^3x-2y'^2y-16x^2 = 0$ ۴۴) $(3y-1)^2y'^2 = 4y$

۴۵) $y'^3 = yy'^2-x^2y'+x^2y = 0$ ۴۶) $y'^3+(x+2)e^y = 0$

۴۷) $y = y'^2+2y'^3$ ۴۸) $y^{2/3}+(y')^{2/3} = 1$

۴۹) $y = \sin^{-1}y'+\ln(1+y''^2)$

۵۰) $y'e^{-x}+y^2-2ye^x = 1-e^{2x},\quad y_1 = e^x$

۵۱) $y'+y^2-2y\sin x+\sin^2 x-\cos x = 0,\quad y_1 = \sin x$

۵۱) اگر معادله یک دسته منحنی بفرم قطبی بیان شده باشد، معادله دیفرانسیل مسیراصلی بصورت $f(r,\theta,\frac{dr}{d\theta}) = 0$ میباشد و معادله‌دیفرانسیل مسیرقائم‌بفرم $f(r,\theta,-r^2\frac{d\theta}{dr}) = 0$ بیان می‌شود . مسیرهای قائم منحنی های زیر را پیداکنید.

a) $xy = c$ b) $y = x-1+ce^{-x}$

c) $y^2 = 2x^2(1-cx)$ d) $r = c\cos\theta$

e) $r = c(1+\sin\theta)$ f) $r = c(\sec\theta+\tan\theta)$

e) $F=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{1}{2(x^2+y^2)}-x=c$

f) $F=\frac{1}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2+2\tan^{-1}\frac{y}{x}=c$

۲۰) $F=x^2y, \quad x^4y^2+x^3y^5=c$

۲۱) $F=xy, \quad 4x^2y^2+x^4y^5=c$

۲۲) $y^3=x^3+cx^3$ ۲۳) $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=c$

۲۴) $F=\frac{1}{y}, \quad x^2\ln y+\frac{1}{3}(y^2+1)^{3/2}$

۲۵) $F=\frac{1}{x^2}, \quad xy^2-2x^2y-2=cx$ ۲۶) $x=(c+y)e^{-y^2/2}$

۲۷) $y=2^{\sin x}$ ۲۸) a) $xy=c$, b) $y=2-(2+a^2)e^{(x^2-a^2)/2}$

c) $y=(x+1)e^x$ d) $y=cx^{(1-n)/n}$

۲۹) $y^3=x^3(1+c)$ ۳۰) $x^3e^{-y}=c+y$

۳۱) $x-2+ce^{-x}=e^{y^2/2}, \quad z=e^{y^2/2}$

۳۲) $\tan y=(c+x^2)e^{-x^2}, \quad z=\tan y$

۳۳) $\cos y=\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{4}+ce^{-2\sin x}$

۳۴) $v=\frac{1}{\cos y}=x+1+ce^x$ ۳۵) $x^{-2}y=\cos y+y\sin y+c$

۳۶) $(y-c(x+1))(y+x\ln cx)=0$

۳۷) $y=cx+c^3, \quad 4x^3+27y^2=0$

۳۸) $y^3=3cx+6c^2, \quad 3x^2+8y^3=0$

۳۹) $c^2(x^2-4)-2cy-1=0, \quad x^2+y^2=4$

۴۰) $(y+c)^2=x(x-1)^2$ ۴۱) $y^3+(x+c)^2=0$

۴۲) $c^2+cxy+x=0, \quad xy^2-4=0$

۴۳) $c^3x^2-c^2y-2=0, \quad 2y^3+27x^4=0$

۴۴) $(x+c)^2=y(y-1)^2, \quad y=0$ ۴۵) $2y=x^2+c$

۴۶) $4e^{-y/3}=(x+2)^{4/3}+c$ ۴۷) $x=2p+3p^2+c, \quad y=p^2+2p^3$

۴۸) $x=3t+3\cot t+c, \quad y=\cos^3 t$

۴۹) $x=\frac{c}{p^2}-\frac{1}{p}, \quad y=\frac{2c}{p}+\ln p-2$

۵۰) $y=e^x+\frac{1}{c+e^x}$ ۵۱) $y=\sin x+\frac{1}{c+x}$

۵۱) a) $y^2-x^2=k$ b) $x=y-1+ke^{-y}$

c) $x^2+3y^2\ln(ky)=0$ d) $r=k\sin\theta$

e) $r=k(1-\sin\theta)$ f) $r=ke^{-\sin\theta}$

فصل ۳

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

مجموعه مسائل ۱.۳

در تمرینات ۱_۵ نشان دهید توابع y_1و y_2 جوابهای معادله داده شده می باشند.

۱) $y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x \qquad y'' + 4y = 0$

۲) $y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = xe^{-2x} \qquad y'' + 4y' + 4y = 0$

۳) $y_1 = e^{x}\cos 2x, \quad y_2 = e^{x}\sin 2x \qquad y'' - 2y' + 5y = 0$

۴) $y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x} \qquad y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$

۵) $y_1 = x, \quad y_2 = x\ln x \qquad y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$

۶) ثابت کنید اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

باشند، آنگاه $y_1 + y_2$ یک جواب برای معادله فوق نیست.

حل مجموعه مسائل ۱.۳

۱) $y_1' = -2\sin 2x, \quad y_1'' = -4\cos 2x, \Rightarrow y'' + 4y = 0$

$y_2' = 2\cos 2x, \quad y_2'' = -4\sin 2x, \Rightarrow y'' + 4y = 0$

$y = c_1y_1 + c_2y_2, \quad y'' = -4c_1\cos 2x - 4c_2\sin 2x \Rightarrow y'' + 4y = 0$

۲) $y_1' = -2e^{-2x}, \quad y_1'' = 4e^{-2x}, \Rightarrow y'' + 4y' + 4y = 0$

$y_2' = e^{-2x} - 2xe^{-2x}, \quad y_2'' = 4(x-1)e^{-2x} \Rightarrow y'' + 4y' + 4y = 0$

۳) $y_1' = e^{x}(\cos 2x - 2\sin 2x),$

$y_1'' = -e^{x}(4\sin 2x + 3\cos 2x) \Rightarrow y'' - 2y' + 5y = 0$

$y_2' = e^{x}(2\cos 2x + \sin 2x),$

$y_2'' = -e^{x}(3\sin 2x - 4\cos 2x) \Rightarrow y'' - 2y' + 5y = 0$

۴) $y_1' = 1, \quad y_1'' = 0 \Rightarrow y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$

$y_2' = -\frac{1}{x^2}, \quad y_2'' = \frac{2}{x^3} \Rightarrow y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$

۵) $y_1' = 1, y_1'' = 0 \Rightarrow y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$

$y_2' = \ln x + 1, \quad y_2'' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$

۶) $y_1'' + y_2'' + p(x)(y_1' + y_2') + q(x)(y_1 + y_2) = r(x) + r(x) \neq r(x)$

مجموعه مسائل ۲.۳

جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید.

$1)\ y'' - 3y' + 2y = 0 \quad 2)\ y'' - 6y' + 25y = 0$

$3)\ y'' - 3y' = 0 \quad 4)\ y'' + 2y' + 2y = 0 \quad 5)\ y'' + y' + 2y = 0$

معادلات با شرایط اولیه زیر را حل کنید.

$6)\ y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

$7)\ y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 9$

$8)\ y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -6$

$9)\ y'' + y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

$10)\ y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

$11)\ y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \frac{1}{\pi}$

$12)\ 4y'' + 20y' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

۱۳) نشان دهید که جواب عمومی معادله $y'' - y = 0$ را می توان به صورت زیر نوشت.

$$y(x) = c_1 \cosh x + c_2 \sinh x$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرائب ثابت، را طوری پیدا کنید که توابع زیر جوابهای آن باشد.

$14)\ 1, \quad e^{3x} \quad 15)\ e^{(-1-3i)x}, \quad e^{(-1+3i)x}$

$16)\ e^{-x}, \quad xe^{-x} \quad 17)\ e^{2x}, \quad e^{-x}$

$18)\ e^{2x}\cos 2x, \quad e^{2x}\sin 2x \quad 19)\ e^{-x}\cos x, \quad e^{-x}\sin x$

جواب مجموعه مسائل ۲.۳

$1)\ t^2 - 3t + 2 = 0, \quad t = 1, \ t = 2, \quad y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

$2)\ t^2 - 6t + 25 = 0, \quad t = 3 \pm 4i, \quad y = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$

$3)\ t^2 - 3t = 0, \quad t = 0, \ t = 3, \quad y = c_1 + c_2 e^{3x}$

$4)\ t^2 + 2t + 2 = 0, \quad t = -1 \pm i, \quad y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

$5)\ t^2 + t + 2 = 0, \quad t = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{7}i),$

$$y = e^{-x/2}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$$

$6)\ t^2 + 3t + 2 = 0, \quad t = -1, \ t = -2, \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 + c_2, \quad y'(0) = 2 \Rightarrow 2 = -c_1 - 2c_2$

$c_1 = 2, \quad c_2 = -2, \quad y = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$

$7)\ t^2 + 9 = 0, \quad t = \pm 3i, \quad y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = c_1, \quad y'(0) = 9 \Rightarrow 9 = 3c_2,$

$y = 2\cos 3x + 3\sin 3x$

$9)\ t^2 + t + 3 = 0, \quad t = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{11}i),$

$$y = e^{-x/2}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x\right)$$

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1, \quad y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{\sqrt{11}}{2}c_2,$

$$y = 2\frac{\sqrt{11}}{11}e^{-x/2}\sin \frac{\sqrt{11}}{2}x$$

$10)\ t^2 + 5t + 6 = 0, \quad t = -2, \ t = -3, \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2, \quad y'(0) = 2 \Rightarrow 2 = -2c_1 - 3c_2$

$c_۱ = ۵, \quad c_۲ = -۴, \quad y = ۵e^{-۲x} - ۴e^{-۳x}$

۱۱) $t^۲ + ۲\pi t + \pi^۲ = ۰, \quad t = -\pi, -\pi, \quad y = (c_۱ + c_۲ x)e^{-\pi x}$

$y(۱) = ۱ \Rightarrow ۱ = (c_۱ + c_۲)e^{-\pi}, \quad y'(۱) = \frac{۱}{\pi}$

$\Rightarrow \frac{۱}{\pi} = e^{-\pi}(-\pi(c_۱ + c_۲) + c_۲)$

$c_۱ = \frac{e^{\pi}}{\pi}(\pi^۲ + ۱), \quad c_۲ =, \frac{e^{\pi}}{\pi}(\pi - \pi^۲ - ۱)$

$y = \left((\pi^۲ + ۱)x + \pi - \pi^۲ - ۱\right)\frac{e^{\pi(۱-x)}}{\pi}$

۱۲) $۴t^۲ + ۲۰t + ۲۵ = ۰, \quad t = -\frac{۵}{۲}, \frac{-۵}{۲}, \; y = (c_۱ + c_۲ x)e^{-۵x/۲}$

$y(۰) = ۱ \Rightarrow ۱ = c_۱, \quad y'(۰) = ۲ \Rightarrow c_۲ = \frac{۹}{۲},$

$y = \left(۱ + \frac{۹}{۲}x\right)e^{-۵x/۲}$

۱۳) $t^۲ - ۱ = ۰, \quad t = \pm ۱, \quad y = c_۱ e^{x} + c_۲ e^{-x}$

$e^{x} = \cosh x + \sinh x, \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x,$

$y = c_۱(\cosh x + \sinh x) + c_۲(\cosh x - \sinh x)$

$y = c_۳ \cosh x + c_۴ \sinh x$

۱۴) $t = ۰, \quad t = ۳ \Rightarrow y'' - ۳y' = ۰$

۱۵) $t = -۱ + ۳i, \; t = -۱ - ۳i \Rightarrow (t + ۱ - ۳i)(t + ۱ + ۳i) =$

$t^۲ + ۲t + ۱۰ = ۰ \Rightarrow y'' + ۲y' + ۱۰ = ۰$

۱۶) $t = -۱, \quad t = -۱ \Rightarrow y'' + ۲y' + y = ۰$

۱۷) $t = ۲, \quad t = -۱ \Rightarrow y'' - y' - ۲y = ۰$

۱۸) $t = ۲ + ۲i, \; t = ۲ - ۲i \Rightarrow (t - ۲ - ۲i)(t - ۲ + ۲i) =$

$t^۲ - ۴t + ۸ = ۰ \Rightarrow y'' - ۴y' + ۸y = ۰$

۱۹) $t = -۱ + i, \quad t = -۱ + i \Rightarrow (t + ۱ - i)(t + ۱ - i) =$

$t^۲ + ۲t + ۲ = ۰ \Rightarrow y'' + ۲y' + ۲y = ۰$

مجموعه مسائل ۳.۳

رونسکین توابع زیر را پیدا کنید.

۱) $2,\ x$ ۲) $x,\ \frac{1}{x}$

۳) $e^{x},\ 2e^{x},\ e^{-x}$ ۴) $4,\ \sin^{2}x,\ \cos 2x$

۵) $2,\ \cos x,\ \cos 2x$

نشان دهید توابع داده شده، پایه ای برای جوابهای معادله دیفرانسیل متناظر تشکیل می‌دهند.

۶) $e^{-x},\ xe^{-x},\ x^{2}e^{-x},\quad y'''+3y''+3y'+y=0$

۷) $x,\ x^{2},\ x^{3},\quad x^{3}y'''-3x^{2}y''+6xy'-6y=0$

معادله دیفرانسیلی را بنویسید که توابع داده شده جوابهای مستقل خطی آن باشند.

۸) $e^{x},\ xe^{x},\ x^{2}e^{x}$ ۹) $1,\ x,\ e^{2x},\ xe^{2x}$

۱۰) $1,\ e^{-2x},\ e^{-x},\ e^{x},\ e^{2x}$

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بنویسید.

۱۱) $(D^{3}+D^{2}-2D)y=0$ ۱۲) $(D^{4}-6D^{3}+12D^{2}-8D)y=0$

۱۳) $(D^{4}+4D^{2})y=0$ ۱۴) $(D^{4}-6D^{3}+13D^{2}-12D+4)y=0$

۱۵) $(D^{3}-D^{2}+9D-9)y=0$ ۱۶) $(D^{3}-3D^{2}+3D-1)y=0$

۱۷) $(D^{5}+2D^{3}+D)y=0$ ۱۸) $D(D+3)^{2}(D^{2}+4D+13)y=0$

۱۹) $D^{3}(D^{2}+9)^{3}(D-1)^{2}(D+1)y=0$

جواب مجموعه مسائل ۳.۳

۱) $W=\begin{vmatrix}2 & x\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$ ۲) $W=\begin{vmatrix}x & \frac{1}{x}\\ 1 & \frac{-1}{x^{2}}\end{vmatrix}=\frac{-2}{x}$

۳) $W=\begin{vmatrix}e^{x} & 2e^{x} & e^{-x}\\ e^{x} & 2e^{x} & -e^{-x}\\ e^{x} & 2e^{x} & e^{-x}\end{vmatrix}=0$ ۴) $W=\begin{vmatrix}4 & \sin^{2}x & \cos 2x\\ 0 & \sin 2x & -2\sin 2x\\ 0 & 2\cos 2x & -4\cos 2x\end{vmatrix}=0$

۵) $W=\begin{vmatrix}2 & \cos x & \cos 2x\\ 0 & -\sin x & -2\sin 2x\\ 0 & -\cos x & -4\cos 2x\end{vmatrix}=-8\sin^{3}x$

۶) نشان می دهیم هر کدام از توابع $y_1=e^{-x},\ y_2=xe^{-x},\ y_3=x^{2}e^{-x}$ جوابهای معادله می‌باشند، همچنین نشان می دهیم که $W\neq 0$ است.

$$W=\begin{vmatrix}e^{-x} & xe^{-x} & x^{2}e^{-x}\\ -e^{-x} & (-x+1)e^{-x} & (-x^{2}+2x)e^{-x}\\ e^{-x} & (x-2)e^{-x} & (x^{2}-4x2)e^{-x}\end{vmatrix}=2(x^{2}+1)e^{-3x}\neq 0$$

۷) نشان می دهیم هر کدام از توابع $y_1=x,\ y_2=x^{2},\ y_3=x^{3}$ جوابهای معادله می‌باشند، همچنین نشان می دهیم که $W\neq 0$ است.

$$W=\begin{vmatrix}x & x^{2} & x^{3}\\ 1 & 2x & 3x^{2}\\ 0 & 2 & 6x\end{vmatrix}=2x^{3}\neq 0$$

۸) $t=1,\quad t=1,\quad t=1,\Rightarrow (D-1)^{3}y=0$

۹) $t=0,\quad t=0,\quad t=2,\quad t=2\Rightarrow D^{2}(D-2)^{2}y=0$

۱۰) $t=0,\quad t=-2,\quad t=-1,\quad t=1,\quad t=2$

$\Rightarrow D(D+2)(D+1)(D-1)(D-2)y=0$

۱۱) $t^3+t^2-2t=0,\quad t=0,\quad t=1,\quad t=-2$

$y=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{-2x}$

۱۲) $t^4-6t^3+12t^2-8t=0,\quad t=0,\quad t=2,\quad t=2,\quad t=2$

$y=c_1+(c_2+c_3x+c_4x^2)e^{2x}$

۱۳) $t^4+4t^2=0,\quad t=0,\quad t=0,\quad t=2i,\quad t=-2i$

$y=c_1+c_2x+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x$

۱۴) $t^4-6t^3+13t^2-12t+4=0,\ t=1,\ t=1,\ t=2,\quad t=2$

$y=(c_1+c_2x)e^{x}+(c_3+c_4x)e^{2x}$

۱۵) $t^3-t^2+9t-9=0,\quad t=1,\quad t=3i,\quad t=-3i$

$y=c_1e^{x}+c_2\cos 3x+c_3\sin 3x$

۱۶) $t^3-3t^2+3t-1=0,\quad t=1,\quad t=1,\quad t=1$

$y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{x}$

۱۷) $t^5+2t^3+t=0,\quad t=0,\quad t=i,i\quad t=-i,-i$

$y=c_1+(c_2+c_3x)\cos x+(c_4+c_5x)\sin x$

۱۸) $t(t+3)^2(t^2+4t+13)=0,\quad t=0,\quad t=-3,-3$

$t=-2+3i, t=-2-3i$

$y=c_1+(c_2+c_3x)e^{-3x}+e^{-2x}(c_4\cos 3x+c_5\sin 3x)$

۱۹) $t^3(t^2+9)^3(t-1)^2(t+1)=0,\quad t=0,0,0\ t=3i,3i,3i$

$t=-3i,-3i,-3i,\ t=1,1,\ t=-1$

$y=c_1+c_2x+c_3x^2+(c_4+c_5x+c_6x^2)\cos 3x+$

$(c_7+c_8x+c_9x^2)\sin 3x+(c_{10}+c_{11}x)e^{x}+c_{12}e^{-x}$

مجموعه مسائل ۴.۳

۱) قضیه ۸.۳. را ثابت کنید.

فقط فرم جواب خصوصی معادلات زیر را بنویسید.

۲) $y''-8y'+16y=(1-x)e^{4x}$ ۳) $y''+16y=\sin(4x+\beta)$

۴) $y''-4y'=2\cos^2 4x$ ۵) $y''-4y'=xe^{4x}$

۶) $y''-7y'=(x-1)^2$

۷) $y''+2y'+5y=e^{x}\left((x+1)\cos 2x+3\sin 2x\right)$

۸) $y''-4y'+13y=e^{2x}(x^2\cos 3x-x\sin 3x)$

۹) $D(D^2+9)(D^2-8D+25)^2y=x+x^2\sin 3x+x^2e^{4x}\cos 3x$

جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید.

۱۰) $y''+y=\sin 2x$ ۱۱) $y''+3y'+2y=e^{-2x}$

۱۲) $y''+y'+y=e^{x}\sin 3x$ ۱۳) $y^{(4)}-y=e^{x}$

۱۴) $y''-9y=e^{3x}+\sin 3x$ ۱۵) $y'''-3y''+4y'-12y=x+e^{2x}$

۱۶) $y'''-4y''+y'-4y=e^{2x}\sin x$ ۱۷) $y'''+y''=6x+e^{-x}$

۱۸) $y^{(4)}-y=xe^{x}+\cos x$

معادلات با شرایط اولیه زیر را حل کنید.

۱۹) $y''+4y=12\cos^2 x,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

۲۰) $y''+y=3x\sin x,\qquad y(0)=2,\qquad y'(0)=0$

۲۱) $2y''+y=8\sin 2x+e^{-x},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2$

جواب مجموعه مسائل ۴.۳

۲) ۴ دو بار ریشه معادله مفسر میباشد، بنابراین

$$y_p = x^۲ e^{۴x}(Ax+B)$$

۳) $۴i$ یک بار ریشه معادله مفسر میباشد، بنابراین

$$y_p = x(A\cos ۴x + B\sin ۴x)$$

$$۴)\ y'' - ۴y' = ۱ + \cos ۸x$$

صفر یک بار ریشه معادله مفسر و $۸i$ ریشه معادله مفسر نمیباشد، بنابراین

$$y_p = xA + B\cos ۸x + C\sin ۸x$$

۵) ۴ یک بار ریشه معادله مفسر میباشد، بنابراین

$$y_p = xe^{۴x}(Ax+B)$$

۶) صفر یک بار ریشه معادله مفسر میباشد، بنابراین

$$y_p = x(Ax^۲ + Bx + c)$$

۷) $۱+۲i$ – ریشه معادله مفسر نمیباشد، بنابراین

$$y_p = e^x\left((Ax+B)\cos ۲x + (Cx+D)\sin ۲x\right)$$

۸) $۲+۳i$ یک بار ریشه معادله مفسر میباشد، بنابراین

$$y_p = xe^{۲x}\left((Ax^۲+Bx+C)\cos ۳x + (Dx^۲+Ex+F)\sin ۳x\right)$$

۹) صفر یک بار ریشه معادله مفسر میباشد، بنابراین

$$y_{p_۱} = x(A_۱X + B_۱)$$

$۳i$ یک بار ریشه معادله مفسر میباشد، بنابراین

$$y_{p_۲} = x\left((Ax^۲+Bx+C)\cos ۳x + (Dx^۲+Ex+F)\sin ۳x\right)$$

$۴+۳i$ دو بار ریشه معادله مفسر میباشد، بنابراین

$$y_{p_۳} = x^۲e^{۴x}((A_۳x^۲+B_۳x+C_۳)\cos ۳x +$$

$$(D_۳x^۲+E_۳x+F_۳)\sin ۳x),\quad y_p = y_{p_۱} + y_{p_۲} + y_{p_۳}$$

$$۱۰)\ t^۲+۱=۰,\quad t=\pm i,\quad y_h = c_۱\cos x + c_۲\sin x$$

$$y_p = A\cos ۲x + B\sin ۲x$$

$$y_p' = -۲A\sin ۲x + ۲B\cos ۲x,\quad y_p'' = -۴A\cos ۲x - ۴B\sin ۲x$$

$$y''+y = -۳A\cos ۲x - ۳B\sin ۲x \equiv \sin ۲x \Rightarrow A=۰,\quad B=\frac{-۱}{۳}$$

$$y = y_h + y_p = c_۱\cos x + c_۲\sin x - \frac{۱}{۳}\sin ۲x$$

$$۱۱)\ t^۲+۳t+۲=۰,\quad t=-۱,\ t=-۲ \Rightarrow y_h = c_۱e^{-x} + c_۲e^{-۲x}$$

-۲ یک بار ریشه معادله مفسر میباشد، بنابراین

$$y_p = Axe^{-۲x},\quad y_p' = Ae^{-۲x} - ۲Axe^{-۲x},$$

$$y_p'' = -۴Ae^{-۲x} + ۴Axe^{-۲x}$$

$$y'' + ۳y' + ۲y = -Ae^{-۲x} \equiv e^{-۲x} \Rightarrow A = -۱$$

$$y = y_h + y_p = c_۱e^{-x} + c_۲e^{-۲x} - xe^{-۲x}$$

$$۱۲)\ t^۲ + t + ۱ = ۰, \quad t = \frac{۱}{۲}(-۱ \pm \sqrt{۳}i),$$

$$y_h = e^{-x/۲}\left(c_۱ \cos \frac{\sqrt{۳}}{۲}x + c_۲ \sin \frac{\sqrt{۳}}{۲}x\right)$$

$$y_p = e^x(A \cos ۳x + B \sin ۳x)$$

$$y'_p = e^x[(A + ۳B)\cos ۳x + (B - ۳A)\sin ۳x]$$

$$y''_p = e^x[(-۸A + ۶B)\cos ۳x - (۸B + ۶A)\sin ۳x]$$

$$y'' + y' + y = e^x[(-۶A + ۹B)\cos ۳x - (۶B + ۹A)\sin ۳x]$$

$$\equiv e^x \sin ۳x \Rightarrow A = \frac{-۱}{۱۳}, \quad B = \frac{-۲}{۳۹}$$

$$y = y_h + y_p = e^{-x/۲}\left(c_۱ \cos \frac{\sqrt{۳}}{۲}x + c_۲ \sin \frac{\sqrt{۳}}{۲}x\right)$$

$$-\frac{۱}{۳۹}e^x(۳\cos ۳x + ۲\sin ۳x)$$

$$۱۳)\ t^۴ - ۱ = ۰, \quad t = \pm ۱, \quad t = \pm i,$$

$$y_h = c_۱e^x + c_۲e^{-x} + c_۳\cos x + c_۴ \sin x$$

$$y_p = Axe^x,\ y'_p = Ae^x + Axe^x,\ y''_p = ۲Ae^x + Axe^x$$

$$y'''_p = ۳Ae^x + Axe^x, \quad y_p^{(۴)} = ۴Ae^x + Axe^x$$

$$y^{(۴)} - y = ۴Ae^x \equiv e^x \Rightarrow A = \frac{۱}{۴}$$

$$y = y_h + y_p = c_۱e^x + c_۲e^{-x} + c_۳\cos x + c_۴\sin x + \frac{۱}{۴}xe^x$$

$$۱۴)\ t^۲ - ۹ = ۰, \quad t = \pm ۳,\ y_h = c_۱e^{۳x} + c_۲e^{-۳x}$$

$$y_{p۱} = Axe^{۳x},\ y'_p = Ae^{۳x} + ۳Axe^{۳x},$$

$$y''_{p۱} = ۶Ae^{۳x} + ۹xe^{۳x}y'' - ۹y =$$

$$۶Ae^{۳x} \equiv e^{۳x} \Rightarrow A = \frac{۱}{۶},\ y_{p۱} = \frac{۱}{۶}xe^{۳x}$$

$$y_{p۲} = A\cos ۳x + B\sin ۳x, \Rightarrow \quad y'_{p۲} = -۳A\cos ۳x + ۳B\sin ۳x,$$

$$y''_{p۲} = -۹A\cos ۳x - ۹B\sin ۳x, \quad y'' - y =$$

$$-۱۸A\cos ۳x - ۱۸B\sin ۳x \equiv \sin ۳x \Rightarrow A = ۰,\ B = \frac{-۱}{۱۸},$$

$$y_{p۲} = \frac{-۱}{۱۸}\sin ۳x$$

$$y = y_h + y_p = c_۱e^{۳x} + c_۲e^{-۳x} + \frac{۱}{۶}xe^{۳x} + \frac{-۱}{۱۸}\sin ۳x$$

$$۱۵)\ t^۳ - ۳t^۲ + ۴t - ۱۲ = ۰, \quad t = ۳, \quad t = \pm ۲i$$

$$y_h = c_۱e^{۳x} + c_۲\cos ۲x + c_۳\sin ۲x, \quad y_{p۱} = Ax + B$$

$$y'_{p۱} = A, \quad y''_{p۱} = y'''_{p۱} = ۰, \Rightarrow A = \frac{-۱}{۱۲}, \quad B = \frac{-۱}{۳۶}$$

$$y_{p۲} = Ce^{۲x},\ y'_{p۲} = ۲Ce^{۲x},\ y''_{p۲} = ۴Ce^{۲x}$$

$$y'''_{p۲} = ۸Ce^{۲x}, \Rightarrow C = \frac{-۱}{۸} \quad y = y_h + y_p =$$

$$c_۱e^{۳x} + c_۲\cos ۲x + c_۳\sin ۲x - \frac{۱}{۱۲}x - \frac{۱}{۳۶} - \frac{۱}{۸}e^{۲x}$$

$$۱۶)\ t^۳ - ۴t^۲ + t - ۴ = ۰, \quad t = ۴, \quad t = \pm i$$

$$y_h = c_۱e^{۴x} + c_۲\cos x + c_۳\sin x;$$

$$y_p = e^{۴x}(A\cos x + B\sin x)$$

$$y'_p = e^{۴x}[(۴A + B)\cos x + (۴B - A)\sin x]$$

$$y''_p = e^{۴x}[(۱۵A + ۸B)\cos x + (۱۵B - ۸A)\sin x]$$

$$y'''_p = e^{۴x}[(۵۲A + ۴۷B)\cos x + (۵۲B - ۴۷A)\sin x]$$

$$y''' - ۴y'' + y' - ۴y = ۸e^{۴x}[(۲B - A)\cos x - (B + ۲A)\sin ۳x]$$

$$\equiv e^{۴x}\sin x \Rightarrow B = \frac{-۱}{۴۰},\quad A = \frac{-۱}{۲۰}, y = y_h + y_p$$

۱۷) $t^۳ + t^۲ = ۰,\quad t = ۰,۰,\quad t = -۱$

$$y_h = c_۱ + c_۲x + c_۳e^{-x},\quad y_{p۱} = x^۲(Ax + B)$$

$$y'_{p۱} = ۳Ax^۲ + ۲Bx,\quad y''_{p۱} = ۶Ax + ۲B,\quad y'''_{p۱} = ۶A$$

$$y''' + y'' = ۶Ax + ۲B + ۶A \equiv ۶x \Rightarrow A = ۱,\quad B = -۳$$

$$y_{p۲} = Cxe^{-x},\ y'_{p۲} = Ce^{-x} - Cxe^{-x},\ y''_{p۲} = -۲Ce^{-x} + Cxe^{-x}$$

$$y'''_{p۲} = ۳Ce^{-x} - Cxe^{-x},\ y''' + y'' = Ce^{-x} \equiv e^{-x} \Rightarrow C = ۱$$

$$y = y_h + y_p = c_۱ + c_۲x + c_۳e^{-x} + x^۲(x - ۳) + xe^{-x}$$

۱۸) $t^۴ - ۱ = ۰,\quad t = \pm ۱,\quad t = \pm i,$

$$y_h = c_۱e^x + c_۲e^{-x} + c_۳\cos x + c_۴\sin x$$

$$y_{p۱} = x(Ax + B)e^x,\quad y'_{p۱} = e^x(Ax^۲ + (۲A + B)x + B)$$

$$y''_{p۱} = e^x(Ax^۲ + (۴A + B)x + ۲(A + B)),$$

$$y'''_{p۱} = e^x(Ax^۲ + (۶A + B)x + ۳(۲A + B))$$

$$y^{(۴)}_{p۱} = e^x(Ax^۲ + (۸A + B)x + ۴(۳A + B))$$

$$y^{(۴)} - y = e^x(۸Ax + ۱۲A + ۴B) \equiv e^{-x} \Rightarrow A = \frac{۱}{۸}B = \frac{-۳}{۸}$$

$$y_{p۲} = x(C\cos x + E\sin x),\quad y'_{p۲} = (C + Ex)\cos x + (E - Cx)\sin x,$$

$$y''_{p۲} = (۲E - Cx)\cos x - (۲C + Ex)\sin x,$$

$$y'''_{p۲} = -(۳C + Ex)\cos x + (-۳E + Cx)\sin x,$$

$$y^{(۴)}_{p۲} = (-۴E + Cx)\cos x + (۴C + Ex)\sin x$$

$$y^{(۴)} - y = ۴(-E\cos x + C\sin x) \equiv \cos x \Rightarrow E = \frac{-۱}{۴}\quad C = ۰$$

$$y = y_h + y_p = c_۱e^x + c_۲e^{-x} + c_۳\cos x + c_۴\sin x + \frac{۱}{۸}x(x - ۳)e^x - \frac{x}{۴}\sin x$$

۱۹) $y'' + ۴y = ۶(۱ + \cos ۲x),\quad t^۲ + ۴ = ۰,\quad t = \pm ۲i$

$$y_h = c_۱\cos ۲x + c_۲\sin ۲x,\quad y_p = A + x(B\cos ۲x + C\sin ۲x)$$

$$y'_p = (۲Cx + B)\cos ۲x + (C - ۲Bx)\sin ۲x$$

$$y''_p = ۴(C - Bx)\cos ۲x - ۴(B + Cx)\sin ۲x$$

$$y'' + ۴y = ۴A + ۴C\cos ۲x - ۴B\sin ۲x) \equiv ۶ + ۶\cos ۲x$$

$$\Rightarrow A = \frac{۳}{۲},\quad B = ۰,\quad C = \frac{۳}{۲}$$

$$y = y_h + y_p = c_۱\cos ۲x + (c_۲ + \frac{۳}{۲})x\sin ۲x + \frac{۳}{۲}$$

$$y(\pi/۲) = ۰ \Rightarrow c_۱ = \frac{۳}{۲}$$

$$y'(\pi/۲) = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow c_۲ = -\pi$$

$$y = \frac{3}{2}\left(\cos 2x + (x - \frac{2}{3}\pi)\sin 2x + 1\right)$$

۲۰) $t^2 + 1 = 0, \quad t = \pm i, \quad y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x,$

$$y_p = x\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right)$$

$$y'_p = \left(Cx^2 + (D + 2A)x + B\right)\cos x - \left(Ax^2 + (B - 2C)x - D\right)\sin x$$

$$y''_p = \left(-Ax^2 + (4C - B)x + 2(A + D)\right)\cos x -$$

$$\left(Cx^2 + (D + 4A)x - 2(C + B)\right)\sin x \quad y'' + y =$$

$$4Cx\cos x + 2(A + D)\cos x - 4Ax\sin x + 2(C + B)\sin x \equiv 3x\sin x$$

$$\Rightarrow C = 0, \quad A = \frac{-3}{4}, \quad D = \frac{3}{4}, \quad B = 0$$

$$y = y_h + y_p = \left(c_1 - \frac{3}{4}x\right)\cos x + \left(c_2 + \frac{3}{4}x\right)\sin x$$

$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = c_1, \quad y'(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$y = 2\cos x + \sin x + \frac{3}{4}(x\sin x - x^2\cos x)$$

۲۱) $2t^2 + t = 0, \quad t = 0, -\frac{1}{2} \quad y_h = c_1 + c_2 e^{-x/2},$

$$y_{p1} = Ae^{-x}, \quad y'_{p1} = -Ae^{-x}, \quad y''_{p1} = Ae^{-x}$$

$$2y'' + y' = Ae^{-x} \equiv e^{-x} \Rightarrow A = 1$$

$$y_{p2} = B\cos 2x + C\sin 2x \quad y'_{p2} = -2B\sin 2x + 2C\cos 2x$$

$$y''_{p2} = -4B\cos 2x - 4C\sin 2x$$

$$2y'' + y' = (-8B + 2C)\cos 2x - (8C + 2B) \equiv 8\sin 2x$$

$$\Rightarrow B = \frac{-4}{17}, \quad C = -\frac{16}{17}$$

$$y_{p2} = \frac{-4}{17}\cos 2x - \frac{16}{17}\sin 2x$$

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{-x/2} + e^{-x} - \frac{4}{17}\cos 2x - \frac{16}{17}\sin 2x$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = \frac{4}{17}, \quad y'(0) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}c_2 = 1 + \frac{32}{17}, \; c_1 = 6, \; c_2 = -\frac{98}{17}$$

$$y = 6 - \frac{98}{17}e^{-x/2} + e^{-x} - \frac{4}{17}(4\sin 2x + \cos 2x)$$

مجموعه مسائل ۵.۳

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید. برای بدات آوردن y_p، از روش تغییر پارامترها استفاده کنید.

$1)\ y''+4y'+4y=e^x \quad 2)\ y''-2y'+y=e^{2x}$

$3)\ y''+4y=2(x-\sin 2x) \quad 4)\ y''+9y=e^x+\sin 4x$

$5)\ y'''+3y''-4y'=\cos 2x \quad 6)\ y''+y=\tan x$

$7)\ y''+4y=\sec 2x \quad 8)\ y^{(4)}-2y'''+y''=x^2$

$9)\ y''-2y'+y=\frac{e^x}{(1-x)^2} \quad 10)\ y''-3y'+2y=\sin e^{-x}$

$11)\ y''+4y=\sec x\tan x \quad 12)\ y''+9y=\sec x\csc x$

$13)\ y''+9y=\csc 2x \quad 14)\ 9y''+y=\tan^2\frac{x}{3}$

$15)\ y'''+y'=\tan x \quad 16)\ 4y''-4y'+y=e^{x/2}\ln x$

۱۷) نشان دهید، $y_1=\frac{\cos x}{x}$ و $y_2=\frac{\sin x}{x}$ جوابهای معادله دیفرانسیل

$$xy''+2y'+xy=0$$

می باشند، وسپس جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$xy''+2y'+xy=x$$

۱۸) نشان دهید، $y_1=e^x$ و $y_2=x$ جوابهای معادله

$$(x-1)y''-xy'+y=0$$

می باشند، وسپس جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2$$

جواب مجموعه مسائل ۵.۳

$1)\ t^2+4t+4=0,\quad t=-2,-2,\quad y_h=(c_1+c_2x)e^{-2x}$

$y_1=e^{-2x},\quad y_2=xe^{-2x}$

$W=y_1y_2'-y_2y_1'=e^{-4x}$

$y_p=-y_1\int\frac{f_2(x)y_2}{W}\,dx+y_2\frac{f_2(x)y_1}{W}\,dx=$

$-e^{-2x}\int\frac{e^x xe^{-2x}}{e^{-4x}}\,dx+xe^{-2x}\int\frac{e^xe^{-2x}}{e^{-4x}}\,dx=$

$-e^{-2x}\left(\frac{1}{3}xe^{3x}+\frac{1}{9}e^{3x}\right)+\frac{1}{3}xe^{-2x}e^{3x}=-\frac{1}{9}e^x$

$y=(c_1+c_2x)e^{-2x}+\frac{1}{9}e^x$

$2)\ t^2-2t+1=0,\quad t=1,1,\quad y_h=(c_1+c_2x)e^x$

$y_1=e^x,\quad y_2=xe^x$

$W=y_1y_2'-y_2y_1'=e^{2x}$

$y_p=-y_1\int\frac{f_2(x)y_2}{W}\,dx+y_2\frac{f_2(x)y_1}{W}\,dx=$

$-e^x\int\frac{e^{2x}xe^x}{e^{2x}}\,dx+xe^x\int\frac{e^{2x}e^x}{e^{2x}}\,dx=$

$-e^x((x-1)e^x)+xe^{2x}=e^{2x}$

$y=(c_1+c_2x)e^x+e^{2x}$

$3)\ t^2+4=0,\quad t=\pm 2i,\quad y_h=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

$y_1=\cos 2x,\quad y_2=\sin 2x$

$W=y_1y_2'-y_2y_1'=2$

$y_p=-y_1\int\frac{f_2(x)y_2}{W}\,dx+y_2\frac{f_2(x)y_1}{W}\,dx=$

$$-\cos 2x \int (x - \sin 2x)\sin 2x \, dx$$

$$+\sin 2x \int (x - \sin 2x)\cos 2x \, dx =$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{2}(1 + \cos 2x)$$

$4)\ t^2 + 9 = 0, \quad t = \pm 3i, \quad y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

$$y_1 = \cos 3x, \quad y_2 = \sin 3x$$

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = 3$$

$$y_p = -y_1 \int \frac{f_2(x) y_2}{W} dx + y_2 \frac{f_2(x) y_1}{W} dx =$$

$$-\frac{1}{3}\cos 3x \int (e^x - \sin 4x)\sin 3x \, dx$$

$$+\frac{1}{3}\sin 3x \int (e^x - \sin 4x)\cos 3x \, dx =$$

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{10}e^x - \frac{1}{7}\sin 4x$$

$5)\ t^3 + 3t^2 - 4t = 0, \quad t = 0, \quad t = 1, \quad t = -4$

$$y_h = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-4x}, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = e^x, \quad y_3 = e^{-4x}$$

$$y_p = v_1 + v_2 e^x + v_3 e^{-4x}$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-4x} \\ 0 & e^x & -4e^{-4x} \\ 0 & e^x & 16e^{-4x} \end{vmatrix} = 20e^{-3x}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{-4x} \\ 0 & e^x & -4e^{-4x} \\ \cos 2x & e^x & 16e^{-4x} \end{vmatrix} = -5e^{-3x}\cos 2x$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-4x} \\ 0 & 0 & -4e^{-4x} \\ 0 & \cos 2x & 16e^{-4x} \end{vmatrix} = 4e^{-4x}\cos 2x$$

$$\begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & \cos 2x \end{vmatrix} = e^x \cos 2x$$

$$v_1' = -\frac{1}{4}\cos 2x, \quad v_1 = -\frac{1}{8}\sin 2x$$

$$v_2' = \frac{1}{5}e^{-x}\cos 2x, \quad v_2 = \frac{1}{25}e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x)$$

$$v_3' = \frac{1}{20}e^{4x}\cos 2x, \ v_3 = \frac{1}{200}e^{4x}(2\cos 2x + \sin 2x)$$

$$y_p = -\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{25}(2\sin 2x - \cos 2x)$$

$$+\frac{1}{200}(2\cos 2x + \sin 2x)$$

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-4x} - \frac{1}{100}(4\sin 2x + 3\cos 2x)$$

$6)\ t^2 + 1 = 0, \quad t = \pm i, \quad y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x, \quad W = 1$$

$$y_p = -y_1 \int \frac{f_2(x) y_2}{W} dx + y_2 \frac{f_2(x) y_1}{W} dx =$$

$$-\cos x \int \tan x \sin x \, dx + \sin x \int \tan x \cos x \, dx =$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

$7)\ t^2 + 4 = 0, \quad t = \pm 2i, \quad y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

$$y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x, \quad W = 2$$

$$y_p = -y_1 \int \frac{f_2(x) y_2}{W} dx + y_2 \frac{f_2(x) y_1}{W} dx =$$

$$-\frac{1}{2}\cos 2x \int \sec 2x \sin 2x \, dx + \frac{1}{2}\sin 2x \int \sec 2x \cos 2x \, dx =$$

$$\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \ln \cos 2x$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln \cos 2x$$

$8)\ t^4 - 2t^3 + t^2 = 0, \quad t = 0, 0 \quad t = 1, 1$

$$y_h = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)e^x, \ y_1 = 1, \ y_2 = x,$$

$$y_3 = e^x, \ \ y_4 = xe^x$$

$$y_p = v_1 + v_2 x + v_3 e^x + v_4 x e^x$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x & xe^x \\ 0 & 1 & e^x & (x+1)e^x \\ 0 & 0 & e^x & (x+2)e^x \\ 0 & 0 & e^x & (x+3)e^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x & e^x & xe^x \\ 0 & 1 & e^x & (x+1)e^x \\ 0 & 0 & e^x & (x+2)e^x \\ x^2 & 0 & e^x & (x+3)e^x \end{vmatrix} = -e^{2x}x^2(x-2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & e^x & xe^x \\ 0 & 0 & e^x & (x+1)e^x \\ 0 & 0 & e^x & (x+2)e^x \\ 0 & x^2 & e^x & (x+3)e^x \end{vmatrix} = e^{2x}x^2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & xe^x \\ 0 & 1 & 0 & (x+1)e^x \\ 0 & 0 & 0 & (x+2)e^x \\ 0 & 0 & x^2 & (x+3)e^x \end{vmatrix} = -e^x x^2(x+2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & e^x & 0 \\ 0 & 1 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x & x^2 \end{vmatrix} = e^x x^2$$

$$v_1' = -x^2(x-2), \quad v_1 = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$$

$$v_2' = x^2, \ v_2 = \frac{1}{3}x^3, \ v_3' = -e^{-x}x^2(x+2)$$

$$v_3 = e^{-x}(x^3 + 5x^2 + 10x + 10)$$

$$v_4' = e^{-x}x^2, \quad v_4 = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$$

$$y_p = \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 8x + 10$$

$$y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)e^x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 3x^2$$

$9)\ t^2 - 2t + 1 = 0, \quad t = 1, 1, \quad y_h = (c_1 + c_2 x)e^x$

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x, \quad W = e^{2x}$$

$$y_p = -y_1 \int \frac{f_2(x)y_2}{W}\, dx + y_2 \frac{f_2(x)y_1}{W}\, dx =$$

$$-e^x \int \frac{e^x x e^x}{e^{2x}(1-x)^2}\, dx + xe^x \int \frac{e^x e^x}{e^{2x}(1-x)^2}\, dx =$$

$$+e^x\left(\frac{1}{1-x} + \ln(1-x)\right) - xe^{2x}\frac{1}{1-x} = -(1 + \ln(1-x))e^x$$

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x - e^x \ln(1-x)$$

$10)\ t^2 - 3t + 2 = 0, \quad t = 2, 1, \quad y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{2x}, \quad W = e^{3x}$$

$$y_p = -y_1 \int \frac{f_2(x)y_2}{W}\, dx + y_2 \frac{f_2(x)y_1}{W}\, dx =$$

$$-e^x \int \frac{e^{2x} \sin e^{-x}}{e^{3x}}\, dx + e^{2x} \int \frac{e^x \sin e^{-x}}{e^{3x}}\, dx =$$

$$-e^x \cos e^{-x} + e^{2x}(e^{-x} \cos e^{-x} - \sin e^{-x})$$

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x - e^{2x} \sin e^{-x}$$

$11)\ t^2 + 4 = 0, \quad t = \pm 2i, \quad y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

$y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x, \quad W = 2$

$y_p = -y_1 \int \frac{f_2(x)y_2}{W}\, dx + y_2 \frac{f_2(x)y_1}{W}\, dx =$

$-\frac{1}{2}\cos 2x \int \sec x \tan x \sin 2x \, dx$

$+\frac{1}{2}\sin 2x \int \sec x \tan x \cos 2x \, dx =$

$-\cos 2x \ln(\sec x + \tan x) - 2\sin x$

$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \cos 2x \ln(\sec x + \tan x) - 2\sin x$

$12)\ t^2 + 9 = 0, \quad t = \pm 3i, \quad y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

$y_1 = \cos 3x, \quad y_2 = \sin 3x, \quad W = 3$

$y_p = -y_1 \int \frac{f_2(x)y_2}{W}\, dx + y_2 \frac{f_2(x)y_1}{W}\, dx =$

$-\frac{1}{3}\cos 3x \int \sec x \csc x \sin 3x \, dx$

$+\frac{1}{3}\sin 2x \int \sec x \csc x \cos 3x \, dx = \int \sec x \csc x \sin 3x \, dx =$

$\int (3\sec x - 4\cos x) = \ln(\sec x + \tan x)$

$-4\sin x \int \sec x \csc x \cos 3x \, dx = \int (\csc x - 4\sin x)\, dx =$

$\ln(\csc x - \cot x) + 4\cos x$

$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{4}{3}\sin 2x +$

$+\frac{1}{3}\cos 3x \ln(\sec x + \tan x) + \frac{1}{3}\sin 3x \ln(\csc x - \cot x)$

$13)\ t^2 + 9 = 0, \quad t = \pm 3i, \quad y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

$y_1 = \cos 3x, \quad y_2 = \sin 3x, \quad W = 3$

$y_p = -y_1 \int \frac{f_2(x)y_2}{W}\, dx + y_2 \frac{f_2(x)y_1}{W}\, dx =$

$-\frac{1}{3}\cos 3x \int \csc 2x \sin 3x \, dx + \frac{1}{3}\sin 3x \int \csc 2x \cos 3x \, dx =$

$\int \csc 2x \sin 3x \, dx = \int (\frac{\sec x}{2} - 2\cos x) =$

$\frac{1}{2}\ln(\sec x + \tan x) - 2\sin x \int \csc 2x \cos 3x \, dx =$

$\int (\frac{\csc x}{2} - 2\sin x)\, dx = \frac{1}{2}\ln(\csc x - \cot x) + 2\cos x$

$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{2}{3}\sin 2x + \frac{1}{6}\cos 3x \ln(\sec x + \tan x)$

$+\frac{1}{6}\sin 3x \ln(\csc x - \cot x)$

$14)\ t^2 + \frac{1}{9} = 0, \ t = \pm\frac{i}{3}, \ y_h = c_1 \cos\frac{x}{3} + c_2 \sin\frac{x}{3}$

$y_1 = \cos\frac{x}{3}, \quad y_2 = \sin\frac{x}{3}, \quad W = \frac{1}{3}$

$y_p = -y_1 \int \frac{f_2(x)y_2}{W}\, dx + y_2 \frac{f_2(x)y_1}{W}\, dx =$

$-\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3} \int \tan^2\frac{x}{3} \sin\frac{x}{3}\, dx + \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} \int \tan^2\frac{x}{3} \cos\frac{x}{3}\, dx =$

$y = c_1 \cos\frac{x}{3} + c_2 \sin\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{3} \ln(\sec\frac{x}{3} + \tan\frac{x}{3}) - 2$

$15)\ t^3 + t = 0, \quad t = 0, \quad t = \pm i$

$y_h = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x, \ y_1 = 1, \ y_2 = \cos x, \ y_3 = \sin x$

$y_p = v_1 + v_2 \cos x + v_3 \sin x$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \tan x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \tan x$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \tan x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin x$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \tan x \end{vmatrix} = -\sin x \tan x$$

$$v_1' = \tan x,\ v_1 = \ln \sec x,\ v_2' = -\sin x, \quad v_2 = \cos x$$

$$v_3' = -\sin x \tan x,\ v_3 = \sin x - \ln(\sec x + \tan x)$$

$$y_p = \ln \sec x + \cos^2 x + \sin^2 x - \sin \ln(\sec x + \tan x)$$

۱۶) $t^2 - t + \frac{1}{4} = 0,\ t = \frac{1}{2}, \frac{1}{2},\ y_h = (c_1 + c_2 x)e^{x/2}$

$$y_1 = e^{x/2}, \quad y_2 = xe^{x/2} \quad W = e^x$$

$$y_p = -y_1 \int \frac{f_2(x)y_2}{W}\,dx + y_2 \frac{f_2(x)y_1}{W}\,dx =$$

$$-\frac{e^{x/2}}{4} \int \frac{(e^{x/2} \ln x) x e^{x/2}}{e^x}\,dx$$

$$+\frac{1}{4} x e^{x/2} \int \frac{(e^{x/2} \ln x) e^{x/2}}{e^x}\,dx =$$

$$\frac{x^2}{16} e^{x/2}(-3 + 2\ln x)$$

$$y = c_1 + c_2 x)e^{x/2} + \frac{x^2}{16} e^{x/2}(-3 + 2\ln x)$$

۱۷) $y_1 = \frac{\cos x}{x},\ y_1' = -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2},$

$$y_1'' = \frac{2x \sin x + 2\cos x - x^2 \cos x}{x^3},$$

با جایگذاری y_1, y_1', y_1'' داریم $xy_1'' + 2y_1' + xy_1 = 0$ و بطور مشابه می توان نشان داد که y_2 نیز یک جواب معادله می باشد که مستقل از جواب اول است.

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \frac{1}{x^2}$$

$$y_p = -y_1 \int \frac{f_2(x)y_2}{W}\,dx + y_2 \frac{f_2(x)y_1}{W}\,dx =$$

$$-\frac{\cos x}{x} \int x^2 \frac{\sin x}{x}\,dx + \frac{\sin x}{x} \int x^2 \frac{\cos x}{x}\,dx =$$

$$\cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x + \sin x \cos x = 1$$

۱۸) $y_1 = e^x,\ y_1' = e^x,\ y_1'' = e^x$

$$y_2 = x, \quad y_2' = y_2'' = 0$$

با جایگذاری y_1, y_1', y_1'' داریم $(x-1)y_1'' - xy_1' + y_1 = 0$ و بطور مشابه می توان نشان داد که y_2 نیز یک جواب معادله می باشد که مستقل از جواب اول است.

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = (1 - x)e^x$$

$$y_p = -y_1 \int \frac{f_2(x)y_2}{W}\,dx + y_2 \frac{f_2(x)y_1}{W}\,dx =$$

$$-e^x \int \frac{(x-1)x}{(1-x)e^x}\,dx + x \int \frac{(x-1)e^x}{(1-x)e^x}\,dx =$$

$$-x - 1 - x^2, \quad y = c_1 e^x + c_2 x - x^2 - 1$$

مجموعه مسائل ۶.۳

جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید.

۱) $y'' - y' - 2y = e^{x}$ ۲) $y'' + 3y' + 2y = 12e^{x}$

۳) $y'' + 3y' + 2y = e^{ix}$ ۴) $y'' + 3y' + 2y = \sin x$

۵) $y'' + 3y' + 2y = \cos x$ ۶) $y'' + 3y' + 2y = 8 + 6e^{x} + 2\sin x$

۷) $y'' - 2y' - 8y = 10e^{-x} + 9xe^{x}$ ۸) $y'' - 3y' = 2e^{2x}\sin x$

۹) $y^{(4)} - 2y'' + y = x - \sin x$ ۱۰) $y'' + y' = x^{2} + 2x$

۱۱) $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}$ ۱۲) $y'' + 4y = 4x\sin 2x$

۱۳) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{x}$ ۱۴) $y''' - y' = e^{2x}\sin^{2} x$

۱۵) $4y'' - 5y' = x^{2}e^{-x}$ ۱۶) $y''' - y'' + y' - y = 4e^{-2x} + 2x^{2}$

۱۷) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 3e^{2x}$

جواب مجموعه مسائل ۶.۳

بعلت تشابه، مسائل فرد حل شده است.

۱) $(D+1)(D-2)y = e^{x}, \quad y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$

$$(D+1)v = e^{x}, \quad v = e^{-x}\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{x},$$

$$(D-2)y = \frac{1}{2}e^{x}, \quad y_p = \frac{1}{2}e^{2x}\int e^{-x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{x}$$

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} - \frac{1}{2}e^{x}$$

۳) $(D+1)(D+2)y = e^{ix}, \quad y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$

$$(D+1)v = e^{ix}, \quad v = e^{-x}\int e^{x(1+i)}\,dx = \frac{1}{1+i}e^{ix},$$

$$(D+2)y = \frac{1}{1+i}e^{ix}, \quad y_p = \frac{1}{1+i}e^{-2x}\int e^{x(i+2)}\,dx = \frac{1}{1+3i}e^{ix}$$

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{10}(e^{ix} - 3ie^{ix})$$

۵) $(D+1)(D+2)y = \cos x, \quad y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$

$$(D+1)v = \cos x, \quad v = e^{-x}\int e^{x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x),$$

$$(D+2)y = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x),$$

$$y_p = \frac{1}{2}e^{-2x}\int e^{2x}(\cos x + \sin x)\,dx = \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x$$

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{10}(3\sin x + \cos x)$$

۷) $(D-4)(D+2)y = 10e^{x} + 9xe^{x}, \quad y_h = c_1e^{4x} + c_2e^{-2x}$

$$(D-4)v = 10e^{-x} + 9xe^{x}, \quad v = e^{4x}\int (10e^{-5x} + 9xe^{-3x})\,dx =$$

$$-2e^{-x} - 3e^{x}\left(x + \frac{1}{3}\right) \quad (D+2)y = -2e^{-x} + (1-3x)e^{x},$$

$$y_p = e^{-2x}\int e^{2x}(-2e^{-x} - (1+3x)e^{x})\,dx =$$

$$-2e^{-x} - \frac{1}{3}e^{x} - e^{x}\left(x - \frac{1}{3}\right) = -xe^{x} - 2e^{-x}$$

$$y = c_1e^{4x} + c_2e^{-2x} - xe^{x} - 2e^{-x}$$

9) $(D-1)(D-1)(D+1)(D+1)y = x - \sin x,$

$$y_h = (c_1 + c_2x)e^{x} + (c_3 + c_4x)e^{-x}, \quad (D-1)v_1 = x - \sin x,$$

$$v_1 = e^{x}\int (x - \sin x)e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) - x - 1$$

$$(D-1)v_2 = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) - x - 1$$

$$v_2 = e^{x}\int \left(\frac{1}{2}(\cos x + \sin x) - x - 1\right)e^{-x}\,dx = \frac{-1}{2}\cos x + x + 2$$

$$(D+1)v_3 = \frac{-1}{2}\cos x + x + 2,$$

$$v_3 = e^{-x}\int \left(\frac{-1}{2}\cos x + x + 2\right)e^{x}\,dx = \frac{-1}{4}(\cos x + \sin x) + x + 1$$

$$(D+2)y = \frac{-1}{4}(\cos x + \sin x) + x + 1$$

$$y_p = e^{-2x}\int e^{2x}\left(\frac{-1}{4}(\cos x + \sin x) + x + 1\right)dx = x - \frac{1}{4}\sin x$$

$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2x)e^{x} + (c_3 + c_4x)e^{-x} + x - \frac{1}{4}\sin x$$

11) $(D-1)(D-1)(D+2)y = e^{-x}, \quad y_h = (c_1 + c_2x)e^{x} + c_3e^{-2x}$

$$(D-1)v_1 = e^{-x}, \quad v_1 = e^{x}\int e^{-2x}\,dx = \frac{-1}{2}e^{-x}$$

$$(D-1)v_2 = \frac{-1}{2}e^{-x}, \quad v_2 = e^{x}\int \frac{-1}{2}e^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}e^{-x}$$

$$(D+2)y = \frac{1}{4}e^{-x}, \quad y_p = e^{-2x}\int \frac{1}{4}e^{x}\,dx = \frac{1}{4}e^{-x}$$

$$y = (c_1 + c_2x)e^{x} + c_3e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-x}$$

13) $(D-1)(D-1)(D-1)y = e^{x}, \quad y_h = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{x}$

$$(D-1)v_1 = e^{x}, \quad v_1 = e^{x}\int dx = xe^{x}$$

$$(D-1)v_2 = xe^{x}, \quad v_2 = e^{x}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{x}$$

$$(D-1)y = \frac{1}{2}x^2e^{x}$$

$$y_p = e^{x}\int \frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{1}{6}x^3e^{x}$$

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{x} + \frac{1}{6}x^3e^{x}$$

15) $D\left(D - \frac{5}{4}\right)y = \frac{1}{4}x^2e^{-x}$

$$Dv_1 = \frac{1}{4}x^2e^{-x}, \quad v_1 = \frac{-1}{4}(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

$$\left(D - \frac{5}{4}\right)y = \frac{-1}{4}(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

$$y_p = e^{5x/4}\int \frac{-1}{4}(x^2 + 2x + 2)e^{-9x/4}\,dx =$$

$$\frac{1}{729}(81x^2 + 234x + 266)e^{-x}$$

$$y = c_1 + c_2e^{5x/4} + \frac{1}{729}(81x^2 + 234x + 266)e^{-x}$$

17) $(D-1)(D-2)(D-2)y = 3e^{2x}, \quad y_h = c_1e^{x} + (c_2 + c_3x)e^{2x}$

$$(D-1)v_1 = 3e^{2x}, \quad v_1 = e^{x}\int 3e^{x}\,dx = 3e^{2x}$$

$$(D-2)v_2 = 3e^{2x}, \quad v_2 = e^{2x}\int 3\,dx = 3xe^{2x}$$

$$(D-2)y = 3xe^{2x}, \quad y_p = e^{2x}\int 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2e^{2x}$$

$$y = c_1e^{x} + (c_2 + c_3x)e^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x}$$

مجموعه مسائل ۷.۳

با استفاده از روش اپراتورهای معکوس، جواب خصوصی معادلات زیر را تعیین کنید.

۱) $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$ ۲) $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$

۳) $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$ ۴) $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$

۵) $y'' + y' + y = (x + x^2)e^x$ ۶) $y'' - y = \cosh x$

۷) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$ ۸) $y'' + y = 4x\cos x$

۹) $y'' + 4y = \cos^2 x$ ۱۰) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$

۱۱) $y^{(5)} - y^{(4)} = xe^x - 1$ ۱۲) $y'' - y = 4xe^x$

۱۳) $y'' - y = e^x \sin 2x$ ۱۴) $y'' + y = -2\sin x + 4x\cos x$

۱۵) $y'' + y = x^2 \sin x$ ۱۶) $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}\cos x$

۱۷) $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{2}\cos x$

جواب مجموعه مسائل ۷.۳

۱) $y_p = \dfrac{1}{(D+2)^2} 8e^{-2x} = \dfrac{8x^2 e^{-2x}}{2!} = 4x^2 e^{-2x}$

۲) $y_p = \dfrac{1}{(D+3)(D+1)} 9e^{-3x} = \dfrac{9xe^{-3x}}{1! \times (-2)} = -\dfrac{9}{2} xe^{-3x}$

۳) $y_p = 3\dfrac{1}{D(D+3)} xe^{-3x} =$

$$3\left(x\frac{1}{D(D+3)}e^{-3x} - \frac{2D+3}{D^2(D+3)^2}e^{-3x}\right) =$$

$$3\left[x\frac{xe^{-3x}}{-3} - \frac{1}{D(D+3)^2}e^{-3x} - \frac{1}{D^2(D+3)}e^{-3x}\right] =$$

$$-x^2e^{-3x} + x^2e^{-3x} - \frac{xe^{-3x}}{3} = -\frac{1}{6}(3x^2 + 2x)e^{-3x}$$

۴) $y_p = \dfrac{1}{D^2 + 2D + 2}(1 + x) = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{D}{2}\right)(1 + x) =$

$$\frac{1}{2}(1 + x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$$

۵) $y_p = \dfrac{1}{D^2 + D + 1}(x + x^2)e^x =$

$$e^x \frac{1}{(D+1)^2 + (D+1) + 1}(x + x^2) =$$

$$e^x \frac{1}{D^2 + 3D + 3}(x + x^2) = e^x \frac{1}{3}\left(1 - D + \frac{2}{3}D^2\right)(x + x^2) =$$

$$e^x \frac{1}{3}\left(x + x^2 - 1 - 2x + \frac{4}{3}\right) = e^x \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - x + x^2\right)$$

۶) $y_p = \dfrac{1}{2(D-1)(D+1)}(e^x + e^{-x}) = \dfrac{1}{2(D-1)(D+1)}e^x +$

$$\frac{1}{2(D-1)(D+1)}e^{-x} = \frac{xe^x}{4} + \frac{xe^{-x}}{-4} = \frac{1}{2}x\sinh x$$

۷) $y_p = \dfrac{1}{(D-1)(D+4)}(e^{-4x} + xe^{-x}) =$

$$\frac{1}{(D-1)(D+4)}e^{-4x} + \frac{1}{(D-1)(D+4)}xe^{-x} =$$

$$\frac{xe^{-4x}}{-5} + x\frac{1}{(D-1)(D+4)}e^{-x} - \frac{2D+3}{(D-1)^2(D+4)^2}e^{-x} =$$

$$\frac{xe^{-4x}}{-5} + x\frac{1}{-6}e^{-x} - \frac{2D+3}{36}e^{-x} = \frac{xe^{-4x}}{-5} - \left(\frac{x}{6}+\frac{1}{36}\right)e^{-x}$$

8) $y_p = \frac{1}{D^2+1}4x\cos x = 4x\frac{1}{D^2+1}\cos x - \frac{8D}{(D^2+1)^2}\cos x$

$$= 4x\frac{1}{(D+i)(D-i)}e^{ix} - \frac{8D}{(D+i)^2(D-i)^2}e^{ix}$$

$$= 4x\frac{xe^{ix}}{2i} - \frac{8D}{-16}x^2e^{ix} = (x - ix^2)(\cos x + i\sin x)$$

$$y_p = x(x\sin x + \cos x)$$

9) $y_p = \frac{1}{D^2+4}\frac{1}{2}(1+\cos 2x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{1}{D^2+1}\cos 2x$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{1}{(D+2i)(D-2i)}e^{2ix} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{xe^{2ix}}{4i}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8i}x(\cos 2x + i\sin 2x),$$

$$y_p = \frac{1}{8}(x\sin 2x + 1)$$

10) $y_p = \frac{1}{(D-1)^3}e^x = \frac{x^3e^x}{3!}$

11) $y_p = \frac{1}{D^4(D-1)}(xe^x - 1) = \frac{1}{D^4(D-1)}xe^x - \frac{1}{D^4(D-1)} =$

$$x\frac{1}{D^4(D-1)}e^x - \frac{4D^3(D-1)+D^4}{D^8(D-1)^2}e^x - \frac{1}{D^4(D-1)} =$$

$$x\frac{xe^x}{1} - \frac{4}{D^5(D-1)}e^x - \frac{1}{D^4(D-1)^2}e^x - \frac{x^4}{-4!} =$$

$$x^2e^x - \frac{4xe^x}{2} - \frac{x^2e^x}{2} - \frac{x^4}{-4!} = \frac{1}{24}x^4 + (\frac{1}{2}x - 4)xe^x$$

12) $y_p = \frac{1}{(D+1)(D-1)}4xe^x =$

$$4x\frac{1}{(D+1)(D-1)}e^x - 4\frac{(D-1)+(D+1)}{(D+1)^2(D-1)^2}e^x =$$

$$4x\frac{xe^x}{2} - 4\frac{1}{(D+1)^2(D-1)}e^x - 4\frac{1}{(D+1)(D-1)^2}e^x =$$

$$4x\frac{xe^x}{2} - 4\frac{xe^x}{4} - 4\frac{x^2e^x}{4} = e^x(x^2-x)$$

13) $y_p = \frac{1}{D^2-1}e^x\sin 2x = e^x\frac{1}{(D+1)^2-1}\sin 2x =$

$$e^x\frac{1}{D^2+2D}\sin 2x = e^x\frac{1}{2D-4}\sin 2x =$$

$$\frac{1}{2}e^x\frac{D+2}{D^2-4}\sin 2x = \frac{1}{2}e^x\frac{D+2}{-8}\sin 2x = \frac{-1}{8}(\cos 2x + \sin 2x)e^x$$

14) $y_p = \frac{1}{D^2+1}(-2\sin x + 4x\cos x) = \frac{-2}{D^2+1}\sin x +$

$$\frac{1}{D^2+1}4x\cos x$$

با توجه به حل مساله ۸ داریم

$$\frac{1}{D^2+1}4x\cos x = x(x\sin x + \cos x)$$

$$-2\frac{1}{D^2+1}\sin x = -2\frac{1}{(D+i)(D-i)}e^{ix} = -2\frac{xe^{ix}}{2i}$$

$$= ix(\cos x + i\sin x), \quad y_p = x(x\sin x + \cos x) + x\cos x$$

15) $y_p = \frac{1}{D^2+1}x^2\sin x = x\frac{1}{D^2+1}x\sin x - \frac{D-i+D+i}{(D^2+1)^2}x\sin x$

$$= x\left(x\frac{1}{(D+i)(D-i)}e^{ix} - \frac{D-i+D+i}{(D+i)^2(D-i)^2}e^{ix}\right)$$

$$-x\frac{1}{(D+i)(D-i)^2}e^{ix} - x\frac{1}{(D+i)^2(D-i)}e^{ix}$$

$$+\frac{2}{(D-i)^3(D+i)}e^{ix}+\frac{1}{(D+i)^2(D-i)^2}e^{ix}$$

$$+\frac{2}{(D+i)^3(D-i)}e^{ix}+\frac{1}{(D+i)^2(D-i)^2}e^{ix}=$$

$$x^2\frac{xe^{ix}}{2i}-2x\frac{1}{(D+i)^2(D-i)}e^{ix}-2x\frac{1}{(D+i)(D-i)^2}e^{ix}$$

$$+\frac{2x^3e^{ix}}{-12i}+\frac{x^2e^{ix}}{-8i}+\frac{2xe^{ix}}{-8i}+\frac{x^2e^{ix}}{-8i}=$$

$$x^2\frac{xe^{ix}}{2i}-2x\frac{xe^{ix}}{-4}-2x\frac{x^2e^{ix}}{4i}$$

$$+\frac{2xe^{ix}}{-8i}++\frac{2x^3e^{ix}}{-12i}+2\frac{x^2e^{ix}}{-8i}=\frac{i}{6}x^3(\cos x+i\sin x)+$$

$$(\frac{1}{2}+\frac{i}{4}x^2(\cos x+i\sin x)+\frac{i}{4}x(\cos x+i\sin x))=$$

$$y_p=-\frac{x^3}{6}\cos x+\frac{x^2}{4}\sin x+\frac{x}{4}\cos x$$

۱۶) $y_p=\frac{1}{(D+1)^2}x^2e^{-x}\cos x=e^{-x}\frac{1}{D^2}x^2\cos x=$

$$e^{-x}\left(x\frac{1}{D^2}x\cos x-\frac{2}{D^3}x\cos x\right)=$$

$$e^{-x}\Big[x\left(x\frac{1}{D^2}\cos x-\frac{2D}{D^4}\cos x\right)$$

$$-x\frac{2D}{D^4}\cos x+\frac{6}{D^4}\cos x\Big]=e^{-x}\Big[x(-x\cos x-2D\cos x)$$

$$-x2D\cos x+6\cos x\Big]=e^{-x}(-x^2\cos x+4x\sin x+6\cos x)$$

۱۷) $y_p=y_{p1}+y_{p2},\quad y_{p1}=\frac{1}{D^4+2D^3+2D^2+2D+1}xe^x=$

$$e^x\frac{1}{(D+1)^4+2(D+1)^3+2(D+1)^2+2(D+1)+1}x=$$

$$e^x\frac{1}{D^4+6D^3+14D^2+16D+8}x=$$

$$e^x\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}D\right)x=e^x\left(\frac{x}{8}-\frac{1}{4}\right)$$

$$y_{p2}=\frac{1}{2}\frac{1}{D^4+2D^3+2D^2+2D+1}\cos x=$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{D^4+2D^3+2D^2+2D+1}e^{ix}=\frac{1}{2}.\frac{1}{(D^2+1)(D+1)^2}e^{ix}=$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(D+i)(D-i)(D+1)^2}e^{ix}=$$

$$\frac{1}{2}\frac{xe^{ix}}{2i(1+i)^2}=\frac{xe^{ix}}{-8}=\frac{x}{-8}(\cos x+i\sin x)$$

$$y_{p2}=-\frac{x}{8}\cos x$$

مجموعه مسائل ۸.۳

جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

۱) $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ۲) $y'' = x + \sin x$

۳) $y^{(4)} = \frac{1}{x}$ ۴) $x^2 y'' = y'^2$

۵) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ ۶) $y'' + y' \tan x = \sin 2x$

۷) $xy'' + y' = y'^2$ ۸) $y'' + y'^2 = 0$

۹) $xy'' - y' = x^2 e^x$ ۱۰) $y'y'' = -x$

۱۱) $xy'' - y' - x \sin \frac{y'}{x}$ ۱۲) $2yy'' = 1 + y'^2$

۱۳) $yy'' = -y'^2$ ۱۴) $yy'' = y^2 y' + y'^2$

۱۵) $(y-1)y'' = 2y'^2$ ۱۶) $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$

۱۷) $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$ ۱۸) $yy'' + y'^2 = x$

۱۹) $x^2 y'' = y - xy'$ ۲۰) $x^2 yy'' = (y - xy')^2$

۲۱) $y'' + xy' + y = 0$ ۲۲) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

۲۳) $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$ ۲۴) $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$

۲۵) $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$ ۲۶) $(x+2)^2 y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$

۲۷) $x^2 y'' - 6y = 12 \ln x$ ۲۸) $x^2 y'' + xy' - y = 4$

۲۹) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^4$ ۳۰) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = \frac{1}{x^2}$

۳۱) $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = \frac{1-x^2}{x}$

۳۲) $(x^2+4)y'' - 2xy' + 2y = 8$

۳۳) $(x \sin x + \cos x)y'' - x \cos x \, y' + y \cos x = x$

۳۴) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = (x^2 + x - 1)e^{2x}$

۳۵) $(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 0$

۳۶) $y'' - 4xy' + 4x^2 y = xe^{x^2}$

۳۷) $x^2 y'' + (x - 4x^2)y' + (1 - 2x + 4x^2)y = (x^2 - x + 1)e^x$

جواب مجموعه مسائل ۸.۳

۱) $y' = \tan x + c_1, \quad y = \ln\sec x + c_1 x + c_2$

۲) $y' = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + c_1, \quad y = \frac{1}{6}x^3 - \sin x + c_1 x + c_2$

۳) $y''' = \ln x + c_1, \quad y'' = x\ln x + c_1 x + c_2 =$

$y' = \frac{1}{2}x^2 \ln x + c_3 x^2 + c_4 x + c_5,$

$y = \frac{1}{6}x^3 \ln x + c_6 x^3 + c_7 x^2 + c_8 x + c_9$

۴) $y' = p, \quad x^2 p' = p^2, \quad \frac{dp}{p^2} = \frac{dx}{x^2}$

$\frac{-1}{p} = \frac{-1}{x} - c_1, \quad \frac{x}{c_1 x + 1}\, dx = dy,$

$y = \frac{1}{c_1}\left(x - \frac{1}{c_1}\ln(c_1 x + 1)\right) + c_2$

۵) $y' = p, \quad xp' = p\ln\frac{p}{x}$

$p = vx, \quad p' = v + xv', \quad v + xv' = v\ln v$

$x\frac{dv}{dx} = v(\ln v - 1) \Rightarrow \frac{dv}{v(\ln v - 1)} = \frac{dx}{x}$

$\ln(\ln v - 1) = \ln c_1 x \Rightarrow \ln v = c_1 x + 1 \Rightarrow v = e^{c_1 x + 1}$

$y' = xe^{c_1 x + 1}, \quad y = (c_1 x - c_1^2)e^{1 + x/c_1} + c_2$

۶) $y' = p, \quad p' + p\tan x = \sin 2x, \quad \int \tan x\, dx = \ln\sec x$

$p = \cos x\left(\int 2\sin x\, dx + c_1\right) = -2\cos^2 x + c_1\cos x$

$y = c_1 \sin x + c_2 - x - \frac{1}{2}\sin 2x$

۷) $y' = p, \quad p' + \frac{1}{x}p = \frac{1}{x}p^2, \quad p^{-2}p' + \frac{1}{x}p^{-1} = \frac{1}{x}$

$u = p^{-1}, \quad u' = -p^{-2}p', \quad u' - \frac{1}{x}u = -\frac{1}{x}$

$\int -\frac{1}{x}\, dx = -\ln x, \quad u = x\left(-\int \frac{1}{x^2}\, dx + c_1\right)$

$p^{-1} = 1 + c_1 x \Rightarrow y' = \frac{1}{1 + c_1 x} \Rightarrow y = c_1 \ln(x + c_1) + c_2$

۸) $y' = p, \quad p' + p^2 = 0, \quad \frac{-dp}{p^2} = dx$

$\frac{1}{p} = x + c_1, \quad y' = \frac{1}{x + c_1}, \quad y = \ln(x + c_1) + c_2$

۹) $y' = p, \quad p' - \frac{1}{x}p = xe^x, \quad \int -\frac{1}{x}\, dx = -\ln x$

$y' = p = x\left(\int e^x\, dx + c_0\right) = xe^x + c_0 x$

$y = e^x(x - 1) + c_1 x^2 + c_2$

۱۰) $y' = p, \quad pp' = -x \Rightarrow p\, dp = -x\, dx \Rightarrow p^2 = -x^2 + c_1^2$

$y' = \pm\sqrt{-x^2 + c_1^2},$

$y = \pm\frac{1}{2}\left(x(c_1^2 - x^2)^{1/2} + c_1^2 \sin^{-1}\frac{x}{c_1}\right) + c_2$ فرمول شماره ۲۳۴

۱۱) $y' = p, \quad p' - \frac{p}{x} - \sin\frac{p}{x} = 0$

$p = vx, \quad p' = v + xv', \quad v + xv' - v - \sin v = 0$

$x\frac{dv}{dx} = \sin v \Rightarrow \sec v\, dv = \frac{dx}{x}, \quad \ln\tan\frac{v}{2} = \ln c_1 x$

$\tan\frac{v}{2} = c_1 x \Rightarrow v = 2\tan^{-1} c_1 x, \quad y' = 2x\tan^{-1} c_1 x$

$y = \int 2x\tan^{-1} c_1 x\, dx = x^2 \tan^{-1} c_1 x - \int \frac{c_1 x^2}{1 + (c_1 x)^2} =$

$x^2 \tan^{-1} c_1 x - \frac{1}{c_1}\left(x - \frac{1}{c_1}\tan^{-1} c_1 x\right) + c_0$

$c_1^2 y = (c_1^2 x^2 + 1)\tan^{-1} c_1 x - c_1 x + c_2$

۱۲) $y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy}, \quad 2yp\frac{dp}{dy} = 1 + p^2$

$\frac{2p}{1+p^2}\,dp = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln(1+p^2) = \ln c_1 y, \quad 1 + p^2 = c_1 y$

$y' = \pm\sqrt{c_1 y - 1} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 y - 1}} = \pm\, dx$

$\frac{2}{c_1\sqrt{c_1 y - 1x}} = x + c_0, \quad 4c_1 y = 4 + (c_1 x + c_2)^2$

۱۳) $y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy}, \quad yp\frac{dp}{dy} = -p^2$

$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow p = \frac{c_1}{y}, \quad y\,dy = c_1\,dx$

$y = \pm(c_1 x + c_2)^{1/2}$

۱۴) $y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy}, \quad yp\frac{dp}{dy} = y^2 p + p^2$

$p = 0 \Rightarrow y = c, \quad \frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = y, \quad \int -\frac{1}{y}\,dy = -\ln y$

$y' = p = y\left(\int dy + c_1\right) = y^2 + c_1 y \Rightarrow \frac{dy}{y^2 + c_1 y} = dx$

$\frac{1}{c_1}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y + c_1}\right) = dx, \quad x = \frac{1}{c_1}\ln\left|\frac{y}{y + c_1}\right| + c_2$

۱۵) $y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy}, \quad (y-1)p\frac{dp}{dy} = 2p^2$

$p = 0 \Rightarrow y = c, \quad \frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y-1}, \quad \ln p = \ln c_1 (y-1)^2$

$\frac{dy}{(y-1)^2} = c_1\,dx \Rightarrow \frac{1}{y-1} = c_1 x + c_2$

$y = 1 + \frac{1}{c_1 x + c_2}$

۱۶) $y'' = p, \quad y''' = p', \quad (p')^2 + p^2 = 1$

$p' = \pm\sqrt{1 - p^2} \Rightarrow \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = \pm\, dx, \quad \sin^{-1} p = \pm(x + c_1)$

$y'' = p = \sin(\pm x + c_1) \Rightarrow y' = -\cos(\pm x + c_1) + c_2$

$\Rightarrow y = \pm\sin(x + c_1) + c_2 x + c_3$

۱۷) $y = e^{\int z\,dx}, \quad y' = ze^{\int z\,dx}, \quad y'' = z'e^{\int z\,dx} + z^2 e^{\int z\,dx}$

$e^{2\int z\,dx}(2z' + 2z^2 - 3z^2 - 4) = 0 \Rightarrow \frac{2dz}{4 + z^2} = dx$

$\tan^{-1}\frac{z}{2} = x + c_1 \Rightarrow z = 2\tan(x + c_1) \Rightarrow \int z\,dx =$

$2\ln\sec(x + c_1) + c_0, \quad y = c_2\sec^2(x + c_1)$

۱۸) $(yy')' = x \Rightarrow yy' = \frac{1}{2}x^2 + c_1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3}x^2 + c_1 x + c_2$

۱۹) $x^2 y'' + xy' - y = 0, \quad t^2 + (1-1)t - 1 = 0, \quad t = \pm 1$

$y = c_1 x + c_2 x^{-1}$

۲۰) $y = e^{\int z\,dx}, \quad y' = ze^{\int z\,dx}, \quad y'' = z'e^{\int z\,dx} + z^2 e^{\int z\,dx}$

$e^{2\int z\,dx}(x^2 z' + x^2 z^2 - x^2 z^2 + 2xz - 1) = 0 \Rightarrow z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}$

$\int \frac{2}{x}\,dx = \ln x^2, \quad z = x^{-2}\left(\int dx + c_1\right) = x^{-1} + c_1 x^{-2}$

$\int z\,dx = \ln x + c_1 x^{-1} + c_0, \quad y = e^{\int z\,dx} = c_2 x e^{c_1 x^{-1}}$

۲۱) $0 - 1 + 1 = 0, \quad \frac{d}{dx}(y' + (x - 0)y) = 0 \Rightarrow y' + xy = c_1$

$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2, \quad y = e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(\int c_1 e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx + c_2\right)$

۲۲) $t^2 + (-3-1)t + 4 = 0, \quad t = 2,\ 2, \quad y = (c_1 + c_2\ln x)x^2$

۲۳) $t^2 + (-3-1)t + 3 = 0, \quad t = 3,\ 1, \quad y = c_1 x + c_2 x^3$

۲۴) $t^۲+(۱-۱)t+۴=۰, \quad t=\pm ۲i,$

$y=c_۱\cos ۲\ln x+c_۲\sin ۲\ln x$

۲۵) $\frac{d^۲y}{dz^۲}-۴\frac{dy}{dz}+۵y=۳e^{۲z}, \quad t^۲-۴t+۵=۰, \quad t=۲\pm i$

$y_h=e^{۲z}(A\cos z+B\sin z), \quad y_p=Ce^{۲z}=۳e^{۲z}$

$y=x^۲(A\cos\ln x+B\sin\ln x)+۳x^۲$

۲۶) $t^۲+(-۳-۱)t-۳=۰, \quad t=۱,\ -۳,$

$y=c_۱(x+۲)+c_۲(x+۲)^{-۳}$

۲۷) $\frac{d^۲y}{dz^۲}-\frac{dy}{dz}-۶y=۱۲z, \quad t^۲-t-۶=۰, \quad t=۳,\ -۲$

$y_h=c_۱e^{۳z}+c_۲e^{-۲z}, \quad y_p=Az+B=-۲z+\frac{۱}{۳}$

$y=c_۱x^۳+c_۲x^{-۲}-۲\ln x+\frac{۱}{۳}$

۲۸) $\frac{d^۲y}{dz^۲}-y=۴, \quad t^۲-۱=۰, \quad t=\pm ۱$

$y_h=c_۱e^{z}+c_۲e^{-z}, \quad y_p=A=-۴$

$y=c_۱x+c_۲x^{-۱}-۴$

۲۹) $\frac{d^۲y}{dz^۲}-۳\frac{dy}{dz}+۲y=e^{۴z}, \quad t^۲-۳t+۲=۰, \quad t=۲,\ ۱$

$y_h=c_۱e^{۲z}+c_۲e^{z}, \quad y_p=Ae^{۴z}=\frac{۱}{۶}e^{۴z}$

$y=c_۱x^۲+c_۲x+\frac{۱}{۶}x^۴$

۳۰) $\frac{d^۲y}{dz^۲}-۳\frac{dy}{dz}+۲y=e^{-۲z}, \quad t^۲-۳t+۲=۰, \quad t=۲,\ ۱$

$y_h=c_۱e^{۲z}+c_۲e^{z}, \quad y_p=Ae^{-۲z}=\frac{۱}{۱۲}e^{-۲z}$

$y=c_۱x^۲+c_۲x+\frac{۱}{۱۲}x^{-۲}$

۳۱) $f_۱+xf_۲=۰\Rightarrow y_۱=x, \quad y=ux, \quad u'=p$

$p'+p\left(\frac{۲}{x}-\frac{۲x}{۱+x^۲}\right)=\frac{۱-x^۲}{x^۲(۱+x^۲)}, \quad g(x)=\ln\frac{x^۲}{۱+x^۲}$

$p=\frac{۱+x^۲}{x^۲}\left(\int\frac{۱-x^۲}{(۱+x^۲)^۲}\,dx+c_۱\right)=\frac{۱+x^۲}{x^۲}\left(\frac{x}{۱+x^۲}+c_۱\right)$

$u=\int\left(\frac{۱}{x}+\frac{c_۱}{x^۲}+c_۱\right)dx+c_۲=\ln x-\frac{c_۱}{x}+c_۱x+c_۲$

$y=ux=x\ln x+c_۱(x^۲-۱)+c_۲x$

۳۲) $f_۱+xf_۲=۰\Rightarrow y_۱=x, \quad y=ux, \quad u'=p$

$p'+p\left(\frac{۲}{x}-\frac{۲x}{۴+x^۲}\right)=\frac{۸}{x(۴+x^۲)}, \quad g(x)=\ln\frac{x^۲}{۴+x^۲}$

$p=\frac{۴+x^۲}{x^۲}\left(\int\frac{۸x}{(۴+x^۲)^۲}\,dx+c_۱\right)=\frac{۴+x^۲}{x^۲}\left(-\frac{۴}{۴+x^۲}+c_۱\right)$

$u=\int\left(\frac{-۴}{x^۲}+\frac{۴c_۱}{x^۲}+c_۱\right)dx+c_۲=\frac{۴}{x}-\frac{۴c_۱}{x}+c_۱x+c_۲$

$y=ux=c_۱(x^۲-۴)+c_۲x+۴$

۳۳) $f_۱+xf_۲=۰\Rightarrow y_۱=x, \quad y=ux, \quad u'=p$

$p'+p\left(\frac{۲}{x}-\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}\right)=\frac{x}{x(x\sin x+\cos x)}$

$g(x)=\ln\frac{x^۲}{x\sin x+\cos x},$

$p=\frac{x\sin x+\cos x}{x^۲}\left(\int\frac{x^۲}{(x\sin x+\cos x)^۲}\,dx+c_۱\right)$

$\int\frac{x^۲}{(x\sin x+\cos x)^۲}\,dx=\int\frac{(x\sec x)(x\cos x)}{(x\sin x+\cos x)^۲}\,dx=$

$\frac{-x\sec x}{x\sin x+\cos x}+\int\frac{\sec^۲ x(x\sin x+\cos x)}{x\sin x+\cos x}\,dx=$

$$\frac{-x\sec x}{x\sin x+\cos x}+\tan x=\frac{-x\cos x+\sin x}{x\sin x+\cos x}$$

$$u'=p=\frac{-x\cos x+\sin x}{x^2}+c_1\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$$

$$u=\int u'\,dx=-\frac{\sin x}{x}-c_1\frac{\cos x}{x}+c_2,$$

$$y=-\sin x-c_1\cos x+c_2x$$

34) $1+f_1+f_2=0,\quad y_1=e^x,\quad y=ue^x,\quad u'=p$

$$p'+\left(\frac{2e^x}{e^x}-\frac{2x+1}{x}\right)p=\frac{(x^2+x-1)e^x}{x}$$

$$p=x\left(\int\left(e^x+\frac{1}{x}e^x-\frac{1}{x^2}e^x\right)dx+c_1\right)=$$

$$x\left(e^x+\int\frac{1}{x}e^x\,dx+\frac{1}{x}e^x-\int\frac{1}{x}e^x\,dx+c_1\right)$$

$$u=\int(xe^x+e^x+c_1x)\,dx=xe^x+C_1x^2+c_2,$$

$$y=(xe^x+c_1x^2+c_2)e^x$$

35) $a^2+af_1+f_2=0\Rightarrow a^2(x-2)-a(4x-7)+4x-6=0$

$$x(a^2-4a+4)-2a^2+7a-6=0,\ a=2,$$

$$y_1=e^{2x},\ y_2=ue^{2x},\quad u'=p$$

$$u=\int\frac{1}{e^{2x}}e^{\int\frac{4x-7}{x-2}dx}dx=\frac{1}{2}(x-2)^2,\quad y_2=\frac{1}{2}(x-2)^2e^{2x}$$

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{2x}+c_2(x-2)^2e^{2x}$$

36) $f_2-\frac{1}{2}f_1'-\frac{1}{4}f_1^2=4x^2+2-4x^2=2,$

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int-2x\,dx}=e^{x^2}$$

$$v''+2v=\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}},\quad v=c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x+\frac{1}{2}x$$

$$y=uv=e^{x^2}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)+\frac{1}{2}xe^{x^2}$$

37) $f_2-\frac{1}{2}f_1'-\frac{1}{4}f_1^2=\frac{5}{4x^2},\quad u=e^{-\frac{1}{2}\int(\frac{1}{x}-4)\,dx}=e^{2x}x^{-1/2}$

$$x^2v''+\frac{5}{4}v=\frac{(x^2-x+1)e^x}{e^{2x}x^{-1/2}},\quad t^2-t+\frac{5}{4}=0,\quad t=\frac{1}{2}\pm i$$

$$v_h=x^{1/2}(c_1\cos\ln x+c_2\sin\ln x),\quad v_p=x^{1/2}e^{-x}$$

$$y=uv=e^{2x}(c_1\cos\ln x+c_2\sin\ln x+e^{-x})$$

مسائل تکمیلی

جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید.

۱) $(D^6 + 9D^4 + 24D^2 + 16D)y = 0$

۲) $(D^2 - 2D + 5)^2 y = 0$

۳) $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$

۴) $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$

۵) $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 5y''' - 6y' - 4y = 0$

۶) $y^{(4)} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$

۷) $y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$

فقط فرم جواب خصوصی معادلات زیر را بنویسید.

۸) $y'' + 4y = \sin x \sin 2x$

۹) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 2x$

۱۰) $y^{(4)} + 4y'' + 4y = \cos x$

۱۱) $y^{(4)} + 4y'' + 4y = x \sin 2x$

جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید.

۱۲) $y''' - y = \sin x$ ۱۳) $y'' + 4y = x \sin^2 x$

۱۴) $y^{(5)} + 4y''' = e^x + 3 \sin 2x + 1$

۱۵) $y''' - 2y' + 4y = e^x \cos x + x^2 + \sin 2x$

۱۶) $y'' - y = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$

۱۷) $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$

۱۸) $y'' + y = (\sin^7 x \cos^8 x)^{-1/3}$

۱۹) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$

۲۰) $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$

۲۱) $y'' + y' + ye^{-2x} = e^{-3x}$ ۲۲) $y'' - 2y' \tan x = 1$

۲۳) $y''x \ln x - y' = \ln^2 x$

۲۴) معادله کشی از مرتبه دلخواه.

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$$

با فرض $a = \dfrac{d}{dz}$ داریم

$$xDy = \frac{dy}{dz} = ay$$

$$x^2 D^2 y = \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} = a(a-1)$$

$$x^3 D^3 y = \frac{d^3 y}{dz^3} - 3\frac{d^2 y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz} = a(a-1)(a-2)y$$

$$x^k D^k y = a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)y$$

معادلات زیر را حل کنید.

$a)$ $x^3 y''' + 2xy' - 2y = 0$

$b)$ $x^4 y^{(4)} + 2x^3 y''' + x^2 y'' - xy' + y = 0$

$c)$ $(1+x)^3 y''' + (1+x)^2 y'' + 3(1+x)y' - 8y = 0$

۲۵) $xy'' + (1-x)y'$ ۲۶) $xy'' + 2y' - xy = 0$

۲۷) $yy'' + y'^{2} = 1$ ۲۸) $y'' = y'(1 + y'^{2})$

۲۹) $y''' = \sqrt{1 + y''^{2}}$ ۳۰) $y'' + y'^{2} = 2e^{-y}$

۳۱) معادله دیفرانسیل $F(x,y,y',y'')$ را همگن تعمیم یافته می نامیم، اگر بتوان عددی مانند m یافت بطوری که x,y,y',y'' بترتیب از درجه $1, m, m-1, m-2$ باشند. در اینصورت از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم.

$$x = e^{t}, \quad y = ue^{mt}$$

مثال معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$x^{3}y'' = (y - xy')^{2}$$

حل معادله از نوع همگن تعمیم یافته است، زیرا عددی مانند m مانند وجود دارد بطوری که

$$3 + m - 2 = 2m \Rightarrow m = 1, \quad x = e^{t}, \quad y = ue^{t}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(\frac{du}{dt}e^{t} + ue^{t}\right)e^{-t} = \frac{du}{dt} + u$$

$$y'' = e^{-t}\left(\frac{d^{2}u}{dt^{2}} + \frac{du}{dt}\right)$$

$$x^{3}y'' = (y - xy')^{2} \Rightarrow \frac{d^{2}u}{dt^{2}} + \frac{du}{dt} = \left(\frac{du}{dt}\right)^{2}$$

معادله دیفرانسیل فاقد متغیر، با فرض $\frac{d^{2}u}{dt^{2}} = p\frac{dp}{du}$, $\frac{du}{dt} = p$, داریم.

$$p\frac{dp}{du} + p = p^{2} \Rightarrow p = 0, \quad \frac{dp}{du} + 1 = p$$

$$y = x\ln\frac{x}{c_1x + c_2}, \quad y = cx$$

۳۲) $y''^{2} - 5y' + 6 = 0$ ۳۳) $y''(1 + 2\ln y') = 1$

۳۴) $y'y''' - 3y''^{2} = 0$

۳۵) $xy'^{2}y'' - y'^{3} = \frac{1}{3}x^{4}$

۳۶) $yy'' - y'^{2} - 1 = 0$ ۳۷) $1 + y'^{2} = 2yy''$

۳۸) $(y''')^{2} + xy''' - y'' = 0$

۳۹) $(1 + 2x)y''' + 4xy'' - (1 - 2x)y' = e^{-x}$

۴۰) $y'' = y'^{3} + y'$ ۴۱) $yy'' - y'^{2} = y^{2}\ln y$

۴۲) چنانچه روش های بیان شده در قسمتهای ،ث ،ج ، چ ، ح. در مورد معادله خطی با ضرائب متغییر به نتیجه نرسد، می‌توان از تغییر متغیر $u = r(x)$ استفاده کرد و داریم.

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = f_3(x) \Rightarrow$$

$$\frac{d^{2}y}{du^{2}} + \frac{\frac{d^{2}u}{dx^{2}} + f_1\frac{du}{dx}}{\left(\frac{du}{dx}\right)^{2}}\frac{dy}{du} + \frac{f_2y}{\left(\frac{du}{dx}\right)^{2}} = \frac{f_3}{\left(\frac{du}{dx}\right)^{2}}$$

فرض کنید u طوری انتخاب شود که $\frac{du}{dx} = \sqrt{\frac{\pm f_2}{a^{2}}}$. اگر

$$\frac{\frac{d^{2}u}{dx^{2}} + f_1\frac{du}{dx}}{\left(\frac{du}{dx}\right)^{2}} = A$$

آنگاه معادله تبدیل به معادله خطی با ضرائب ثابت بصورت زیر می شود.

$$\frac{d^{2}y}{du^{2}} + A\frac{dy}{du} \pm a^{2}y = \frac{f_3}{\left(\frac{du}{dx}\right)^{2}}$$

معادلات زیر را حل کنید.

a) $y'' - (1 + 4e^x)y' + 3e^{x/2}y = e^{2(x+e^x)}$

b) $y'' - \cot x y' - \sin^2 x y = \cos x - \cos^3 x$

c) $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{2x^2 + 1}{x^6}$

۴۳) اگر یک جواب خصوصی y_1، معادله خطی زیر را داشته باشیم، آنگاه جایگذاری $y = uy_1$ ما را به یک معادله فاقد متغیر میرساند.

معادلات زیر را حل کنید.

a) $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)y^{(4)} - x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' + 6y = 0$

b) $(x^2 + x)y''' - (x^2 + 3x + 1)y'' + \left(x + 4 + \frac{2}{x}\right)y' - \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right)y = 3x^2(x+1)^2$

جواب مسائل تکمیلی

۱) $y = c_1\cos x + c_2\sin x + (c_3 + c_4x)\cos 2x + (c_5 + c_6x)\sin 2x$

۲) $y = e^x((c_1 + c_2)\cos 2x + (c_3 + c_4x)\sin 2x)$

۳) $y = c_1e^{2x} + (c_2 + c_3x)\cos x + (c_4 + c_5x)\sin x$

۴) $y = e^{-x}(c_1 + c_2x)\cos x + e^{-x}(c_3 + c_4x)\sin x$

۵) $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + (c_3 + c_4\cos x + c_5\sin x)e^{-x}$

۶) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + (c_3\cos 2x + c_4\sin 2x)e^{-x}$

۷) $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + (c_3\cos 2x + c_4\sin 2x)e^{-x}$

۸) $y_p = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3\cos 3x + c_4\sin 3x$

۹) $y_p = xe^{-3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

۱۰) $y_p = A\cos x + B\sin x$

۱۱) $y_p = (A + Bx)\sin 2x + (C + Dx)\cos 2x$

۱۲) $y = c_1e^x + e^{-x/2}\left[c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$

۱۳) $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{8}x - \frac{x}{32}\cos 2x - \frac{1}{16}x^2\sin 2x$

۱۴) $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4\cos 2x + c_5\sin 2x + \frac{1}{5}e^x + \frac{1}{24}x^3 + \frac{3}{32}x\sin 2x$

۱۵) $y = c_1e^{-2x} + (c_2\cos x + c_3\sin x)e^x + \frac{1}{8}(2x^2 + 2x + 1)$

۱۶) $y = c_1e^x + c_2e^{-x} - 1 - xe^{-x} + (e^x - e^{-x})\ln|1 - e^{-x}|$

۱۷) $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{4}{3}\cos x\sqrt{\cot x}$

۱۸) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{9}{4} \cos x (\cot x)^{1/3} + \frac{9}{10} \sin x (\tan^2 x)^{1/3}$

۱۹) $y = (c_1 - x)e^{-x} \cos x + (c_2 + \ln \sin x)e^{-x} \sin x$

۲۰) $y = c_1 x + c_2 e^x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right) e^x$

۲۱) $y = c_1 \cos e^{-x} + c_2 \sin e^{-x} + e^{-x}$

۲۲) $y = c_1 + c_2 \tan x + \frac{1}{2}(1 + x \tan x)$

۲۳) $y = c_1(\ln x - 1)x + c_2 + x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)$

۲۴) $a)\ y = c_1 x + x(c_2 \cos \ln x + c_3 \sin \ln x)$

$b)\ y = c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x (\ln x)^2 + c_4 x (\ln x)^3$

$c)\ y = c_1 (1 + x)^2 + c_2 \cos 2\ln(1 + x) + c_3 \sin 2 \ln(1 + x)$

۲۵) $y = c_1 + c_2 \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt$

۲۶) $y = \frac{1}{x}(c_1 e^x + c_2 e^{-x})$

۲۷) $y = \left((x + c_1)^2 + c_2\right)^{1/2}$

۲۸) $x + c_2 = \ln \sin(y + c_1)$

۲۹) $y = \sinh(x + c_1) + c_2 x + c_3$

۳۰) $e^y + c_1 = (x + c_2)^2$

۳۲) $y + c_2 = \frac{6}{5}(x + c_1) + \frac{5}{12}(x + c_1)^2$

۳۳) $x + c_2 = p(2 \ln p - 1), \quad y + c_1 = p^2 \ln p$

۳۴) $x = c_1 y^2 + c_2 y + c_3$

۳۵) $y = c_2 + \frac{3}{7}(x + c_1)^{7/3} - \frac{3}{4} c_1 (x + c_1)^{4/3}$

۳۶) $y = \frac{c_1}{2}\left(e^{(x+c_2)/c_1} + e^{-(x+c_2)/c_1}\right)$

۳۷) $(x - c_1)^2 = 4c_2(y - c_2)$

۳۸) $y = c_1 x^3 + 18 c_1^2 x^2 + c_2 x + c_3$

۳۹) $y = c_1 e^{-x} + c_2 (x^2 + 3x)e^{-x} + c_3 + \frac{x}{4} e^{-x}$

۴۰) $y = \sin^{-1} c_1 e^x + c_2$

۴۱) $\ln y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

۴۲) $a)\ y = c_1 e^{e^x} + c_2 e^{3e^x} - e^{2e^x}, \quad a^2 = 3$

$b)\ y = c_1 e^{-\cos x} + c_2 e^{\cos x} - \cos x$

$c)\ y = c_1 \cos 1/x + c_2 \sin 1/x + 1/x^2$

۴۳) $a)\ y = c_1 e^x + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x$

$b)\ y = c_1 x \ln x + c_2 x e^x + c_3 x - \frac{1}{3} x^4 - \frac{3}{2} x^3 - 3x^2$

فصل ۴

حل معادلات با استفاده از سریها

مجموعه مسائل ۱.۴

در مورد همگرائی سریهای زیر تحقیق کنید و در صورت همگرا بودن، شعاع همگرائی را بدست آورید.

۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{1+n^2} = 1 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x + \cdots$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty} n! e^{nx} = 1 + e^x + 2! e^{2x} + \cdots$

۳) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} - + \cdots$

۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \cdots$

شعاع همگرائی سریهای زیر را بدست آورید.

۵) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

۶) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)3^n}$

۷) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^{2n-1}}{2n-1}$

۸) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} x^n$

۹) $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x+1)^n$

۱۰) بسط تیلور تابع $f(x) = \ln x$ را در نقطه $x = 2$ بنویسید.

۱۱) بسط ماک لورن تابع $f(x) = \ln(x+1)$ را بنویسید.

۱۲) بسط ماک لورن تابع $f(x) = \sin^2 x$ را بنویسید.

۱۳) بسط ماک لورن تابع $f(x) = \cos^2 x$ را بنویسید.

۱۴) بسط تیلور تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نقطه $x = 1$ بنویسید و شعاع همگرائی را تعیین کنید.

۱۵) بسط تیلور تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه $x = 1$ بنویسید و شعاع همگرائی را تعیین کنید.

جواب مجموعه مسائل ۱.۴

۲) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+۱}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)!e^{(n+۱)x}}{n!e^{nx}}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)n!e^{nx}e^{x}}{n!e^{nx}}=\lim_{n\to\infty}(n+۱)e^{x}=\infty$$

۳) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+۱}}{u_n}\right|=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-۱)^{n+۱}(x-۱)^{n+۱}(n+۱)}{(-۱)^{n}(x-۱)^{n}(n+۲)}\right|=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)n!e^{nx}e^{x}}{n!e^{nx}}=\lim_{n\to\infty}(x-۱)\frac{n+۱}{n+۲}=x-۱,\quad R=۱$$

$$-۱\le ۱-x<۱\Rightarrow ۰<x\le ۲$$

۴) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+۱}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(۲)^{n}x^{n+۱}}{۲^{n+۱}x^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{۲}=\frac{x}{۲},\quad R=۲$

$$-۱<\frac{x}{۲}<۱\Rightarrow -۲<x<۲$$

۵) $\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+۱}}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-(۲n)!}{۲(n+۱)!}\right|=۰,\quad R=\infty$

۶) $\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+۱}}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+۱)۳^{n}}{(n+۲)۳^{n+۱}}\right|=\frac{۱}{۳},\quad R=۳$

۷) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+۱}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+۴)^{۲n+۱}(۲n-۱)}{(x+۴)^{۲n-۱}(۲n+۱)}\right|$

$$=(x+۴)^{۲}<۱\Rightarrow -۵<x<-۳$$

۸) $\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+۱}}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{۲}}{(n+۱)^{۲}}=۱,\quad R=۱$

۹) $\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+۱}}{c_n}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)!}{n!}=\infty,\quad R=۰,\quad x+۱=۰\Rightarrow x=-۱$$

۱۰) $f(۲)=\ln ۲,\quad f'(۲)=\frac{۱}{۲},\quad f''(۲)=\frac{-۱}{۲^{۲}},\cdots$

$$\ln x=\ln ۲+\frac{x-۲}{۲}-\frac{(x-۲)^{۲}}{۲!}\times\frac{۱}{۲^{۲}}+\cdots$$

۱۱) $f(۰)=\ln ۱=۰,\quad f'(۰)=۱,\quad f''(۰)=۱,\cdots$

$$\ln(x+۱)=x-\frac{۱}{۲}x^{۲}+\frac{۱}{۳}x^{۳}-\frac{۱}{۴}x^{۴}\pm\cdots$$

۱۲) $f(۰)=۰,\ f'(۰)=۰,\ f''(۰)=۲,\ f''''(۰)=۰,\quad f^{(۴)}(۰)=-۸,\cdots$

$$\sin^{۲}x=\sum_{n=۰}^{\infty}x^{n}\frac{f^{(n)}(۰)}{n!}=\frac{۲x^{۲}}{۲!}-\frac{۸x^{۴}}{۴!}+\frac{۳۲x^{۶}}{۶!}\pm\cdots$$

$$f(x)=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{(۲n)!}(۲x)^{۲n}$$

۱۳) با استفاده از رابطه $\cos^{۲}x=۱-\sin^{۲}x$ می توان نوشت.

$$\cos^{۲}x=۱-\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{(۲n)!}(۲x)^{۲n}$$

$$=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{(۲n)!}۲^{۲n-۱}x^{۲n}$$

۱۴) $f(۱)=۱,\quad f'(۱)=-۱,\quad f''(۱)=۲,\quad f'''(۰)=-۶$

$$\frac{۱}{x}=۱-(x-۱)+(x-۱)^{۲}-(x-۱)^{۳}+(x-۱)^{۴}-\cdots$$

$$\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+۱}}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-۱)^{n+۱}}{(-۱)^{n}}\right|=۱,\quad R=۱$$

۱۵) $f(۴)=۲,\ f'(۴)=\frac{۱}{۴}\ f''(۴)=-\frac{۱}{۳۲},\quad f'''(۴)=\frac{۳}{۸\times ۳۲}$

$$\sqrt{x}=۲+\frac{۱}{۴}(x-۴)+$$

$$۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}۱\times ۳\times ۵۵\times\cdots\times(۲n-۳)}{۲\times ۴\times ۶\times\cdots\times(۲n)\times ۴^{n}}(x-۴)^{n}$$

مجموعه مسائل ۲.۴

جوابهای معادلات دیفرانسیل زیر را به فرم سری توانی برحسب توانهای $x-a$ تا جمله k ام بنویسید.

۱) $y''-xy'+2y=0,\quad k=7,\quad a=0$

۲) $2(x^2+8)y''+2xy'+(x+2)y=0,\quad k=4,\quad a=0$

۳) $y''-xy'-y=\sin x,\quad k=5,\quad a=0$

۴) $xy''+x^2y'-2y=0,\quad k=4,\quad a=1$

۵) $y''-xy'-y=0,\quad k=4,\quad a=1$

۶) $(2+x^2)y''-xy'+4y=0,\quad k=4,\quad a=0$

۷) $y''-xy'+x^2y=0,\quad k=4,\quad a=0$

۸) $y''+x^2y=1+x+x^2,\quad k=8,\quad a=0$

۹) $y''+2x^2y=0,\quad k=3,\quad a=0$

۱۰) $y'=\ln xy,\quad k=5,\quad y(1)=1$

۱۱) $y'=\cos x+\sin y,\quad k=5,\quad y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$

۱۲) $y''-y=\sin x,\quad k=7,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2$

۱۳) $y''-2y=e^{2x},\quad k=7,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=2$

۱۴) $y''+2yy'=0,\quad k=7,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$

۱۵) $y''=\sin xy,\quad k=5,\quad y(\frac{\pi}{2})=1,\quad y'(\frac{\pi}{2})=1$

۱۶) $y''=\cos xy,\quad k=5,\quad y(\frac{\pi}{2})=1,\quad y'(\frac{\pi}{2})=1$

جواب مجموعه مسائل ۲.۴

۱) $y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+\cdots \quad (1)$

$$y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+5c_5x^4+\cdots \quad (2)$$

$$y''=2c_2+6c_3x+12c_4x^2+20c_5x^3+30c_6x^4+\cdots \quad (3)$$

با جایگذاری (۳),(۲),(۱) در معادله داریم.

$$2c_2+6c_3x+12c_4x^2+20c_5x^3+30c_6x^4+\cdots-(c_1x+2c_2x^2+3c_3x^3+4c_4x^4+5c_5x^5+\cdots)+2(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+\cdots)$$

$2c_2+2c_0=0,\quad c_2=-c_0$ ضریب x^0

$6c_3-c_1+2c_1=0,\quad c_3=-\frac{c_1}{6}$ ضریب x^1

$12c_4-2c_2+2c_2=0,\quad c_4=0$ ضریب x^2

$20c_5-3c_3+2c_3=0,\quad c_5=\frac{c_3}{20},\quad c_5=\frac{-c_1}{120}$ ضریب x^3

$$y=c_0+c_1x-c_0x^2-\frac{1}{6}c_1x^3-\frac{1}{120}c_1x^5+\cdots$$

$$y=c_0(1-x^2)+c_1\left(x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{120}x^5-\frac{x^7}{1680}+\cdots\right)$$

۲) مشابه حل تمرین ۱ ، (۳),(۲),(۱) را در معادله جایگذاری می کنیم، داریم

$$4c_2x^2+12c_3x^3+24c_4x^4+\cdots+32c_2+96c_3x+192c_4x_2+\cdots$$
$$+2c_1x+4c_2x^2+6c_3x^3+8c_4x^4+\cdots+c_0x+c_1x^2+c_2x^3$$
$$+c_3x^4+\cdots+2c_0+2c_1x+2c_2x^2+2c_3x^3+2c_4x^4+\cdots=0$$

$$32c_2 + 2c_0 = 0, \quad c_2 = -\frac{c_0}{16} \quad \text{ضریب } x^0$$

$$96c_3 + 4c_1 + c_0 = 0, \quad c_3 = -\frac{c_1}{24} - \frac{c_0}{96} \quad \text{ضریب } x^1$$

$$192c_4 + 10c_2 + c_1 = 192c_4 - \frac{10}{16}c_0 + c_1 = 0,$$

$$c_4 = \frac{5}{1536}c_0 - \frac{c_1}{192} \quad \text{ضریب } x^2$$

$$y = c_0\left(1 - \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{96} + \frac{5x^4}{1536}\cdots\right) +$$
$$c_1\left(x - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{192} + \cdots\right)$$

۳) مشابه حل تمرین ۱، (۱)، (۲)، (۳) را در معادله جایگذاری می کنیم و بجای $\sin x$ بسط مک لورن آنرا قرار می دهیم، سپس با متحد قراردادن ضرائب x های هم توان داریم

$$2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \cdots - c_1x - 2c_2x^2 - 3c_3x^3 - 4c_4x^4 + \cdots$$
$$-c_0 - c_1x - c_2x^2 - c_3x^3 - c_4x^4 - \cdots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{7!} \mp \cdots$$

$$2c_2 - c_0 = 0, \quad c_2 = \frac{c_0}{2} \quad \text{ضریب } x^0$$

$$6c_3 - c_1 - c_1 = 1, \quad c_3 = \frac{c_1}{3} + \frac{1}{6} \quad \text{ضریب } x^1$$

$$12c_4 - 3c_2 = 0, \quad c_4 = \frac{c_0}{8} \quad \text{ضریب } x^2$$

$$20c_5 - 4c_3 = \frac{-1}{6}, \quad c_5 = \frac{c_1}{15} + \frac{1}{4}, \quad \text{ضریب } x^3$$

$$y = c_0\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \cdots\right) +$$
$$c_1\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \cdots\right) + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + \cdots$$

۴) $x - 1 = X, \quad (X+1)y'' + (X+1)^2y' - 2y = 0$

$$y = c_0 + c_1X + c_2X^2 + c_3X^3 + c_4X^4 + c_5X^5 + \cdots \quad (4)$$

$$y' = c_1 + 2c_2X + 3c_3X^2 + 4c_4X^3 + 5c_5X^4 + \cdots \quad (5)$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3X + 12c_4X^2 + 20c_5X^3 + 30c_6X^4 + \cdots \quad (6)$$

مشابه حل تمرین ۱، (۴)، (۵)، (۶) را در معادله جایگذاری می کنیم، داریم

$$(X+1)y'' + (X+1)^2y' - 2y = 0$$
$$2c_2X + 6c_3X^2 + 12c_4X^3 + 20c_5X^4 + 30c_6X^5 + \cdots +$$
$$2c_2 + 6c_3X + 12c_4X^2 + 20c_5X^3 + 30c_6X^4 + \cdots$$
$$+c_1X^2 + 2c_2X^3 + 3c_3X^4 + 4c_4X^5 + 5c_5X^6 + \cdots +$$
$$2c_1X + 4c_2X^2 + 6c_3X^3 + 8c_4X^4 + 10c_5X^5 + \cdots +$$
$$c_1 + 2c_2X + 3c_3X^2 + 4c_4X^3 + 5c_5X^4 + \cdots -$$
$$2(c_0 + c_1X + c_2X^2 + c_3X^3 + c_4X^4 + c_5X^5 + \cdots)$$

$$2c_2 + c_1 - 2c_0 = 0, \quad c_2 = c_0 - \frac{c_1}{2} \quad \text{ضریب } X^0$$

$$2c_2 + 6c_3 + 2c_1 + 2c_2 - 2c_1 = 0, \quad c_3 = \frac{1}{3}c_1 - \frac{2}{3}c_0 \quad \text{ضریب } X^1$$

$$y = c_0\left(1 + X^2 - \frac{2X^3}{3} + \cdots\right)$$
$$+c_1\left(X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} \mp \cdots\right), \quad -1 < X < 1$$

$$y = c_0\left(1 + (x-1)^2 - \frac{2(x-1)^3}{3} + \cdots\right)$$
$$+c_1\left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \mp \cdots\right), \quad 0 < x < 2$$

۵) $x - 1 = X, \quad y'' - Xy' - y = 0$

(۶)،(۵)،(۴) را در معادله جایگذاری می کنیم، داریم

$$2c_2 + 6c_3X + 12c_4X^2 + 20c_5X^3 + 30c_6X^4 + \cdots$$

$$-c_1X^2 - 2c_2X^3 - 3c_3X^4 - 4c_4X^5 - 5c_5X^6 - \cdots -$$

$$c_1 - 2c_2X - 3c_3X^2 - 4c_4X^3 - 5c_5X^4 - \cdots -$$

$$c_0 - c_1X - c_2X^2 - c_3X^3 - c_4X^4 - c_5X^5 - \cdots)$$

ضریب X^0 $\quad 2c_2 - c_1 - c_0 = 0,\quad c_2 = \frac{c_0}{2} + \frac{c_1}{2}$

ضریب X^1 $\quad 6c_3 - 2c_1 - 2c_2 = 0,\quad c_3 = \frac{c_0}{6} + \frac{c_1}{2}$

$$y = c_0\left(1 + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \cdots\right)$$

$$+c_1\left(X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{2} + \cdots\right)$$

$$y = c_0\left(1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \cdots\right)$$

$$+c_1\left((x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \cdots\right)$$

۶) مشابه حل تمرین ۱، (۳)،(۲)،(۱) را در معادله جایگذاری می کنیم، داریم

$$4c_2 + 12c_3x + 24c_4x^2 + 40c_5x^3 + 60c_6x^4 + \cdots +$$

$$2c_2x^2 + 6c_3x^3 + 12c_4x^4 + 20c_5x^5 + 30c_6x^6 + \cdots$$

$$-c_1x - 2c_2x^2 - 3c_3x^3 - 4c_4x^4 - 5c_5x^5 + \cdots$$

$$+4c_0 + 4c_1x + 4c_2x^2 + 4c_3x^3 + 4c_4x^4 + 4c_5x^5 + \cdots = 0$$

ضریب X^0 $\quad 4c_2 + 4c_0 = 0,\quad c_2 = -c_0$

ضریب X^1 $\quad 12c_3 + 3c_1 = 0,\quad c_3 = -\frac{c_1}{4}$

$$24c_4 + 4c_2 = 0,\quad c_4 = -\frac{1}{6}c_2 = \frac{1}{6}c_0$$

$$y = c_0\left(1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 \pm \cdots\right) + c_1\left(x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{100}x^5 \mp \cdots\right)$$

مسائل شماره ۷ و ۸ مشابه می‌باشند.

۹) مشابه حل تمرین ۱، (۳) و (۲) و (۱) را در معادله جایگذاری می‌کنیم، داریم

$$2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + 30c_6x^4 + \cdots +$$

$$+2c_0x^2 + 2c_1x^3 + 2c_2x^4 + 2c_3x^5 + 2c_4x^6 + 2c_5x^7 + \cdots = 0$$

$$c_2 = 0,\quad c_3 = 0,\quad c_4 = \frac{-c_0}{6},\quad c_5 = -\frac{c_1}{10}$$

$$y = c_0\left(1 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^8}{168} \mp \cdots\right) + c_1\left(x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{360}x^9 \mp \cdots\right)$$

۱۰) $y = y(1) + (x-1)y'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}y''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!}y''(1) + \cdots$

$$y(1) = 1,\quad y'(1) = \ln 1 = 0,\quad y'' = \frac{y + xy'}{xy} \Rightarrow y''(1) = 1$$

$$y''' = -\frac{1}{x^2} + \frac{y''y - y'^2}{y^2},\quad y'''(1) = 0,\quad y^{(4)}(1) = 2$$

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^4 - \frac{7}{120}(x-1)^5$$

۱۱) $y = y(\pi/2) + (x-\pi/2)y'(\pi/2) + \frac{(x-\pi/2)^2}{2!}y''(\pi/2)$

$$+\frac{(x-\pi/2)^3}{3!}y'''(\pi/2) + \cdots$$

$$y(\pi/2) = \pi/2,\quad y'(\pi/2) = 1,\quad y'' = -\sin x + y'\cos y$$

$$y'''(\pi/2) = -1,\quad y''' = -\cos x + y''\cos y - y'^2\sin y,$$

$$y'''(\pi/2) = -1,\quad y^{(4)}(\pi/2) = 4,\quad y^{(5)}(\pi/2) = 2$$

$$y=\pi/2+(x-\pi/2)-\frac{(x-\pi/2)^2}{2}-\frac{(x-\pi/2)^3}{6}+$$
$$\frac{(x-\pi/2)^4}{24}+\frac{(x-\pi/2)^5}{120}+\cdots$$

12) $y=y(0)+xy'(0)+\frac{x^2}{2!}y''(0)+\frac{x^3}{3!}y'''(0)+\frac{x^4}{4!}y^{(4)}(0)+\cdots$

$$y(0)=1,\quad y'(0)=2,\quad y''(0)=1$$
$$y'''-y'=\cos x\Rightarrow y'''(0)=3$$
$$y^{(4)}-y''=-\sin x\Rightarrow y^{(4)}(0)=1$$
$$y=1+2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{60}x^5$$

13) $y=y(0)+xy'(0)+\frac{x^2}{2!}y''(0)+\frac{x^3}{3!}y'''(0)+\frac{x^4}{4!}y^{(4)}(0)+\cdots$

$$y(0)=2,\quad y'(0)=2,\quad y''(0)=5$$
$$y'''-2y'=2e^{2x}\Rightarrow y'''(0)=6$$
$$y^{(4)}-2y''=4e^{2x}\Rightarrow y^{(4)}(0)=14$$
$$y=2+2x+\frac{5}{2}x^2+x^3+\frac{7}{12}x^4+\frac{1}{6}x^5$$

14) $y=y(0)+xy'(0)+\frac{x^2}{2!}y''(0)+\frac{x^3}{3!}y'''(0)+\frac{x^4}{4!}y^{(4)}(0)+\cdots$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=0$$
$$y'''+2y'^2+2yy''=0\Rightarrow y'''(0)=-2$$
$$y^{(4)}+6y'y''+2yy'''=0\Rightarrow y^{(4)}(0)=0$$
$$y=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7$$

15) $y=y(\pi/2)+(x-\pi/2)y'(\pi/2)+\frac{(x-\pi/2)^2}{2!}y''(\pi/2)$

$$+\frac{(x-\pi/2)^3}{3!}y'''(\pi/2)+\cdots$$
$$y(\pi/2)=1,\quad y'(\pi/2)=1,\quad y''(\pi/2)=1$$
$$y'''=(y+xy')\cos xy\Rightarrow y'''(\pi/2)=0,\ y^{(4)}(\pi/2)=-(1+\pi/2)^2,$$
$$y^{(5)}(\pi/2)=-3(1+\pi/2)(2+\pi/2)$$
$$y=1+(x-\pi/2)+\frac{(x-\pi/2)^2}{2}$$
$$-\frac{1}{24}(1+\pi/2)^2(x-\pi/2)^4-\frac{1}{40}(1+\pi/2)(2+\pi/2)(x-\pi/2)^5.$$

۱۶) مشابه تمرین ۱۵می باشد وجواب بفرم زیر است.

$$y=1+(x-\pi/2)-\frac{(x-\pi/2)^3}{6}(1+\pi/2)-\frac{1}{12}(x-\pi/2)^4+$$
$$\frac{1}{120}(1+\pi/2)(1+3\pi/2+\pi^2/4)(x-\pi/2)^5$$

مجموعه مسائل ۳.۴

۱) جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید.

$$a)\ (1 - x^2)y'' - 2xy + 2y = 0$$

$$b)\ (1 - x^2)y'' - 2xy + 6y = 0$$

۲) چند جمله ایهای زیر را به صورت ترکیب خطی از چند جمله ایهای لژاندر بیان کنید.

$$a)\ x^4 - 3x^2 + x \quad b)\ x^3 + x - 2$$

۳) مقدار انتگرالهای زیر را بدست آورید.

$$a)\ \int_{-1}^{1} x^2 P_3(x)\, dx \quad b)\ \int_{-1}^{1} x^3 P_2(x)\, dx$$

$$c)\ \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2) P_3(x)\, dx$$

۴) چند جمله اول بسط توابع زیر را بر حسب توابع لژاندر بیان کنید.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \le 1 \\ 0 & -1 \le x < 0 \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & 0 < x \le 1 \\ 0 & -1 \le x < 0 \end{cases}$$

۵) $Q_3(x)$ را پیدا کنید.

۶) $P_2^2(x)$ و $P_2^3(x)$ را حساب کنید.

۷) $Q_1^1(x)$ و $Q_1^2(x)$ را حساب کنید.

۸) چند جمله ای $f(x) = x^3 - 1$ را به صورت ترکیب خطی از چند جمله ایهای لژاندر بیان کرده سپس به ازای مقادیر مختلف m انتگرال زیر را بررسی کنید.

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx$$

جواب مجموعه مسائل ۳.۴

۱) جواب عمومی بفرم زیر می باشد.

$$y = c_0 \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{2!}x^2 + \frac{(\nu-2)\nu(\nu+1)(\nu+3)}{4!}x^4 - + \cdots\right)$$

$$+c_1 \left(x - \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{3!}x^3 + \frac{(\nu-3)(\nu-1)(\nu+2)(\nu+4)}{4!}x^5 - + \cdots\right)$$

$$a)\ \nu = 1, \quad y = c_0 \left(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - + \cdots\right) + c_1 x$$

$$b)\ \nu = 2, \quad y = c_0(1 - 3x^2) + c_1 \left(x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 - + \cdots\right)$$

$$۲)\ a)\ x^4 - 3x^2 + x = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + c_3P_3(x) +$$

$$c_4P_4(x) \Rightarrow\ x^4 - 3x^2 + x = c_0 + c_1x + \frac{c_2}{2}(3x^2 - 1)$$

$$+\frac{c_3}{2}(5x^3 - 3x) + \frac{c_4}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$\frac{35}{8}c_4 = 1 \Rightarrow c_4 = \frac{8}{35}, \quad c_3 = 0$$

$$\frac{3c_2}{2} - \frac{30c_4}{8} = -3 \Rightarrow c_2 = -\frac{10}{7}, \quad -\frac{3c_3}{2} + c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$c_0 - \frac{c_2}{2} + \frac{3c_4}{8} = 0 \Rightarrow c_0 = -\frac{4}{5}$$

$$x^4 - 3x^2 + x = -\frac{4}{5}P_0(x) + P_1(x) - \frac{10}{7}P_2(x) + \frac{8}{35}P_4(x)$$

$$b)\ x^3 + x - 2 = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + c_3P_3(x)$$

$$x^3 + x - 2 = c_0 + c_1x + \frac{c_2}{2}(3x^2 - 1) + \frac{c_3}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\frac{5}{2}c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = \frac{2}{5}, \quad \frac{3c_2}{2} = 0 \Rightarrow c_2 = 0,$$

$$-\frac{3c_3}{2} + c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{8}{5}$$

$c_0 - \frac{c_2}{2} = -2 \Rightarrow c_0 = -2$

$x^3 + x - 2 = -2P_0(x) + \frac{8}{5}P_1(x) + \frac{2}{5}P_3(x)$

۳) a) $\int_{-1}^{1} x^2 P_3(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(5x^3 - 3x)\,dx = 0$

b) $\int_{-1}^{1} x^3 P_2(x)\,dx = 0$ تابع فرد

c) $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2) P_3(x)\,dx = 0$ تابع فرد

۴) a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \quad c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx$

$c_0 = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 dx\right) = \frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{3}{2}\left(\int_0^1 x\,dx\right) = \frac{3}{4},$

$c_2 = \frac{5}{4}\left(\int_0^1 (3x^2 - 1)\,dx\right) = 0$

$c_3 = \frac{7}{4}\left(\int_0^1 (5x^3 - 3x)\,dx\right) = -\frac{7}{16}$

$f(x) = \frac{1}{2}P_0 + \frac{3}{4}P_1 - \frac{7}{16}P_3 + \frac{11}{32}P_5 - + \cdots$

b) $c_0 = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (2x+1)\,dx\right) = 1, \quad c_1 = \frac{3}{2}\left(\int_0^1 x(2x+1)\,dx\right) = \frac{7}{4},$

$c_2 = \frac{5}{4}\left(\int_0^1 (2x+1)(3x^2-1)\,dx\right) = \frac{5}{8}$

$c_3 = \frac{7}{4}\left(\int_0^1 (2x+1)(5x^3-3x)\,dx\right) = -\frac{7}{16}$

$f(x) = P_0 + \frac{7}{4}P_1 + \frac{5}{8}P_2(x) - \frac{7}{16}P_3 + \cdots$

۵) $Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1$

$Q_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xQ_n(x) - \frac{n}{n+1}Q_{n-1}(x)$

$Q_2(x) = \frac{3}{2}xQ_1(x) - \frac{1}{2}Q_0(x)$

$Q_2(x) = \frac{3}{4}x^2\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\ln 1 + x 1 - x$

$Q_3(x) = \frac{5}{3}xQ_2(x) - \frac{2}{3}Q_1(x)$

$Q_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}$

۶) $P_4^2(x) = (1-x^2)\frac{d^2P_4(x)}{dx^2} = \frac{1-x^2}{8}\frac{d^2}{dx^2}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

$P_4^2(x) = (1-x^2)\left(\frac{105}{2}x^2 - \frac{15}{2}\right)$

$P_4^3(x) = (1-x^2)^{3/2}\frac{d^3P_4(x)}{dx^3} = \frac{(1-x^2)^{3/2}}{8}\frac{d^3}{dx^3}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

$P_4^3(x) = 105x(1-x^2)^{3/2}$

۷) $Q_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2}\frac{dQ_1}{dx} = (1-x^2)^{1/2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{x}{1-x}\right)$

$Q_1^2(x) = (1-x^2)\frac{d^2Q_1}{dx^2} = \frac{2}{1-x^2}$

۸) $x^3 - 1 = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + c_3P_3(x)$

$x^3 - 1 = c_0 + c_1x + \frac{c_2}{2}(3x^2 - 1) + \frac{c_3}{2}(5x^3 - 3x)$

$\frac{5}{2}c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = \frac{2}{5}, \quad \frac{3c_2}{2} = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$

$-\frac{3c_3}{2} + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{3}{5}, \quad c_0 = -1$

$x^3 - 1 = -P_0(x) + \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{2}{5}P_3(x)$

$$\int_{-1}^{1}\left(-P_0(x)+\frac{3}{5}P_1(x)+\frac{2}{5}P_2(x)\right)P_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & m>3\\ \frac{4}{35} & m=3\\ 0 & m=2\\ \frac{2}{5} & m=1\\ -2 & m=0\end{cases}$$

مجموعه مسائل ۴.۴

در مسائل زیر نشان دهید که $x=0$ یک نقطه منفرد منظم می باشد وسپس جواب عمومی هر یک را بدست آورید.

۱) $(2x^2+x^3)y''+(x+3x^2)y'-(1+4x)y=0$

۲) $3x^2y''+x(2-x)y'-(2+x^2)y=0$

۳) $5x^2y''+xy'-(1-x^3)y=0$

۴) $2x^2y''+5y'+xy=0$

۵) $3x(2+3x)y''-4y'+4y=0$

۶) $x^2(4+x)y''+7xy'-y=0$

۷) $xy''+y'+2y=0$

۸) $xy''+y'+2xy=0$

۹) $x^2y''-3xy'+4(1+x)y=0$

۱۰) $x^2y''-x(1+x)y'+y=0$

۱۱) $x^2y''-x(2x+3)y'+4y=0$

۱۲) $x^2y''+x(x^2-1)y'+(1-x^2)y=0$

۱۳) $x^2y''+x(2x-1)y'+x(x-1)y=0$

۱۴) $x^2y''-x^2y'+(x^2-2)y=0$

۱۵) $x^2y''+x(3-x^2)y'-3y=0$

۱۶) $x^2(x+1)y''+x(x-4)y'+4y=0$

جواب مجموعه مسائل ۴.۴

بعلت تشابه، فقط شماره های فرد حل شده اند.

۱) $f_1(x)=2x^2+x^3,\quad f_1(0)=0,\quad x=0$ نقطه منفرد

$$y''+\frac{1+3x}{x(2+x)}y'-\frac{1+4x}{x^2(2+x)}y=0$$

توابع $g(x)=\frac{1+3x}{2+x},\quad h(x)=\frac{1+4x}{2+x}$ در $x=0$ تحلیلی می باشند، لذا نقطه $x=0$ نقطه منفرد منظم می باشد.

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r},\quad y'=\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1},$$
$$y''=\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}$$

با جایگذاری $y,\ y',\ y''$ در معادله داریم.

$$2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r+1}$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r}+3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r+1}$$
$$-\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r}-4\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r+1}=0\Rightarrow$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}((m+r)(m+r+2)-4)\,c_m x^{m+r+1}+$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}((m+r)(2(m+r)-1)-4)\,c_m x^{m+r}=0$$

با مساوی صفر قراردادن ضریب کمترین توان x معادله شاخصی بدست می آید. ضریب x^r

$$(r(2r-1)-1)c_0=0,\quad c_0\neq 0\Rightarrow r_1=1,\ r_2=-\frac{1}{2}$$

ابتدا جواب مربوط به $r=1$ را بدست می آوریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(m^2+4m-1\right)c_m x^{m+2}+\sum_{m=0}^{\infty}\left(2m^2+3m\right)c_m x^{m+1}=0$$

$-c_0+5c_1=0\Rightarrow c_1=\frac{c_0}{5}$ ضریب x^2

$4c_1+14c_2=0\Rightarrow c_2=-\frac{2}{7}c_1=-\frac{2}{35}c_0$ ضریب x^3

$$y_1=c_0x\left(1+\frac{x}{5}-\frac{2}{35}x^2+-\cdots\right)$$

حال جواب مربوط به $r=\frac{-1}{2}$ را بدست می آوریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(m^2+m-\frac{19}{4}\right)c_m x^{m+\frac{1}{2}}+\sum_{m=0}^{\infty}\left(2m^2-3m\right)c_m x^{m-\frac{1}{2}}=0$$

$-\frac{19}{4}c_0-c_1=0\Rightarrow c_1=-\frac{19}{4}c_0$ ضریب $x^{1/2}$

$-\frac{11}{8c_1+c_2}=0\Rightarrow c_2=-\frac{11}{8}\frac{-19}{4}c_0$ ضریب $x^{3/2}$

$$y_2=c_0x^{1/2}\left(1-\frac{19}{4}x-\frac{209}{32}x^2+-\cdots\right)$$

$$y=Ay_1+By_2$$

۳) $f_1(x)=5x^2,\quad f_1(0)=0,\quad x=0$ نقطه منفرد

$$y''+\frac{1}{5x}y'-\frac{1-x^3}{5x^2}y=0$$

توابع $g(x)=\frac{1}{5},\quad h(x)=\frac{1-x^3}{5}$ در $x=0$ تحلیلی می باشند، لذا نقطه $x=0$ نقطه منفرد منظم می باشد. مانند تمرین ۱ با جایگذاری $y,\ y',\ y''$ در معادله داریم.

$$5\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r}-$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+3} = 0$$

با مساوی صفر قراردادن ضریب کمترین توان x معادله شاخصی بدست می آید. ضریب x^r

$$(5r^2 - 4r - 1)c_0 = 0, \quad c_0 \neq 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -\frac{1}{5}$$

ابتدا جواب مربوط به $r = 1$ را بدست می آوریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(5m+6)c_m x^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+4} = 0$$

$11c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0, \quad x^2$ ضریب

$c_2 = 0, \quad x^3$ ضریب

$c_0 + 63c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -\frac{1}{63}c_0, \quad x^4$ ضریب

$$y_1 = c_0 x\left(1 - \frac{1}{63}x^3 + - \cdots\right)$$

حال جواب مربوط به $r = \frac{-1}{5}$ را بدست می آوریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(5m-6)c_m x^{m-1/5} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+14/5} = 0$$

$c_1 = 0, \quad x^{4/5}$ ضریب

$c_2 = 0, \quad x^{9/5}$ ضریب

$27c_3 + c_0 = 0 \Rightarrow c_3 = -\frac{1}{27}c_0, \quad x^{14/5}$ ضریب

$$y_2 = c_0 x^{-1/5}\left(1 - \frac{1}{27}x^3 + - \cdots\right)$$

$y = Ay_1 + By_2$

۵) $f_1(x) = 3x(2+3x), \quad f_1(0) = 0, \quad x = 0$ نقطه منفرده

$$y'' - \frac{4}{3x(2+3x)}y' + \frac{4x}{3x^2(2+3x)}y = 0$$

توابع $h(x) = \frac{4x}{3(2+3x)}$، $g(x) = \frac{-4}{3(2+3x)}$ در $x = 0$ تحلیلی هستند، بنابراین معادله لااقل دارای یک جواب بفرم سری توسعه یافته سری توانی می باشد. با جایگذاری y و مشتقاتش در معادله داریم.

$$6\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} + 9\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r}$$
$$-4\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1} + 4\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

با مساوی صفر قراردادن ضریب کمترین توان x معادله شاخصی بدست می آید. ضریب x^{r-1}

$$(6r(r-1) - 4r)c_0 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{5}{3}, \quad r_2 = 0$$

ابتدا جواب مربوط به $r = \frac{5}{3}$ را بدست می آوریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2m(3m+5)c_m x^{m+2/3} +$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}(9(m+5/3)(m+2/3)+4)c_m x^{m+5/3} = 0$$

$16c_1 + 14c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{7}{8}c_0, \quad x^{5/3}$ ضریب

$44c_2 + 44c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{7}{8}c_0, \quad x^{8/3}$ ضریب

$$y_1 = c_0 x^{5/3}\left(1 + \frac{7}{8}x + \frac{7}{8}x^2 + - \cdots\right)$$

حال جواب مربوط به $r = 0$ رابدست می آوریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2m(3m-5)c_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty}(9m(m-1)+4)c_m x^m = 0$$

$-4c_1 + 4c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = c_0, \quad x^0$ضریب

$4c_2 + 4c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_0,$ ضریب x^1

$y_2 = c_0\left(1 + x - x^2 + - \cdots\right)$

$y = Ay_1 + By_2$

۷) $f_1(x) = x, \quad f_1(0) = 0, \quad x = 0$ نقطه منفرد

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{2x}{x^2}y = 0$$

توابع $h(x) = 2x$ ،$g(x) = 1$ هر دو در نقته $x = 0$ تحلیلی می باشند. باجایگذاری y و مشتقات آن در معادله داریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1}$$
$$2\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

با مساوی صفرقراردادن ضریب x^{r-1}، معادله شاخصی بدست می آید.

$$(r(r-1) + r)c_0 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$$

جواب اول معادله را، با قراردادن $r = 0$ بدست می آوریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2 c_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} 2c_m x^m = 0$$

$c_1 + 2c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = -2c_0,$ ضریب x^0

$4c_2 + 2c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = c_0,$ ضریب x^1

$y_1 = c_0\left(1 - 2x + x^2 - + \cdots\right)$

جواب دوم معادله را بصورت زیر در نظر می گیریم.

$$y_2 = y_1 \ln x + x^0 \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$$

$$y_2' = y_1' \ln x + y_1 \frac{1}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1}$$

$$y_2'' = y_1'' \ln x + 2y_1' \frac{1}{x} - y_1 \frac{1}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2}$$

باجایگذاری y_2, y_2', y_2'' در معادله داریم.

$$(xy_1'' + y_1' + 2y_1)\ln x + 2y_1' + \sum_{m=1}^{\infty}(m^2 - m + 2)a_m x^m +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} = 0$$

چون y_1 جواب معادله است لذا ضریب $\ln x$ مساوی صفر می باشد و داریم.

$$-4 + 4x - + \cdots + \sum_{m=1}^{\infty}(m^2 - m + 2)a_m x^m + \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} = 0$$

$-4 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 4,$ ضریب x^0

$4 + 2a_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -6,$ ضریب x^1

$y_2 = y_1 \ln x + (4x - 6x^2 + - \cdots)$

$y = Ay_1 + By_2$

۹) $f_1(x) = x^2, \quad f_1(0) = 0, \quad x = 0$ نقطه منفرد

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4(1+x)}{x^2}y = 0$$

توابع $g(x) = -3,\ h(x) = 4(1+x)$ در $x = 0$ تحلیلی می باشند پس $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم است. با جایگذاری y, y', y'' در معادله داریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} - 3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r}$$
$$+4\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} + 4\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} = 0$$

با مساوی صفرقراردادن ضریب x^r، معادله شاخصی بدست می آید.

$$(r(r-1)-3r+4)c_0=0 \Rightarrow r_1=r_2=2$$

جواب اول معادله را، با قراردادن $r=2$ بدست می آوریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2 c_m x^{m+2} + \sum_{m=0}^{\infty} 4c_m x^{m+3} = 0$$

$$c_1 + 4c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = -4c_0, \quad x^3 \text{ ضریب}$$

$$4c_2 + 4c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 4c_0, \quad x^4 \text{ ضریب}$$

$$y_1 = c_0 x^2 \left(1 - 4x + 4x^2 - + \cdots\right)$$

جواب دوم معادله را بصورت زیر در نظر می گیریم.

$$y_2 = y_1 \ln x + x^2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$$

$$y_2' = y_1' \ln x + y_1 \frac{1}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} (m+2) a_m x^{m+1}$$

$$y_2'' = y_1'' \ln x + 2y_1' \frac{1}{x} - y_1 \frac{1}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} (m+2)(m+1) a_m x^m$$

باجایگذاری y_2, y_2', y_2'' در معادله داریم.

$$(x^2 y_1'' - 3xy_1' + 4(1+x)y_1)\ln x + 2xy_1' - 4xy_1 +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m+2} + 4\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+3} = 0$$

$$(4x^2 - 24x^3 + 32x^4 - + \cdots) - (4x^2 - 16x^3 + 16x^4 - + \cdots)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m+2} + 4\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+3} = 0$$

$$-24 + 16 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 8, \quad x^3 \text{ ضریب}$$

$$16 + 4a_1 + 4a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -12, \quad x^4 \text{ ضریب}$$

$$y_2 = y_1 \ln x + x^2(8x - 12x^2 + - \cdots)$$

$$y = Ay_1 + By_2$$

۱۱) $f_1(x) = x^2, \quad f_1(0) = 0, \quad x = 0$ نقطه منفرد

$$y'' - \frac{2x+3}{x} y' + \frac{4}{x^2} y = 0$$

توابع $h(x) = 4$ ، $g(x) = -2x - 3$ در $x = 0$ تحلیلی می باشند پس $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم است. با جایگذاری y, y', y'' در معادله داریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r} - 3\sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r}$$

$$-2\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} + 4\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$$

با مساوی صفرقراردادن ضریب x^r، معادله شاخصی بدست می آید.

$$(r(r-1)-3r+4)c_0=0 \Rightarrow r_1=r_2=2$$

جواب اول معادله را، با قراردادن $r=2$ بدست می آوریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2 c_m x^{m+2} - 2\sum_{m=0}^{\infty} (m+2) c_m x^{m+3} = 0$$

$$c_1 - 4c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = 4c_0, \quad x^3 \text{ ضریب}$$

$$4c_2 - 6c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 6c_0, \quad x^4 \text{ ضریب}$$

$$y_1 = c_0 x^2 \left(1 + 4x + 6x^2 - + \cdots\right)$$

جواب دوم معادله را بصورت زیر در نظر می گیریم.

$$y_2 = y_1 \ln x + x^2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$$

$$y_2' = y_1' \ln x + y_1 \frac{1}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} (m+2) a_m x^{m+1}$$

$$y_2'' = y_1''\ln x + 2y_1'\frac{1}{x} - y_1\frac{1}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty}(m+2)(m+1)a_m x^m$$

باجایگذاری y_2'', y_2', y_2 در معادله داریم.

$$(x^2y_1'' - x(2x+3)y_1' + 4y_1)\ln x + 2xy_1' - 2xy_1 - 4y_1 + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m+2} - 2\sum_{m=1}^{\infty}(m+2)a_m x^{m+3} = 0$$

$$(4x^2 + 24x^3 + 48x^4 + \cdots) - (4x^2 + 16x^3 + 24x^4 - + \cdots)$$

$$-(2x^3 + 8x^4 + 12x^5 + \cdots)\sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m+2} -$$

$$-2\sum_{m=1}^{\infty}(m+2)a_m x^{m+3} = 0$$

$24 - 16 - 2 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -6,\quad$ ضریب x^3

$48 - 24 - 8 + 4a_2 - 6a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = -13,\quad$ ضریب x^4

$$y_2 = y_1\ln x - x^2(6x + 13x^2 + \cdots)$$

$$y = Ay_1 + By_2$$

۱۳) $f_1(x) = x^2,\quad f_1(0) = 0,\quad x = 0$ نقطه منفرده

$$y'' + \frac{2x-1}{x}y' + \frac{x(x-1)}{x^2}y = 0$$

توابع $h(x) = x(x-1)$, $g(x) = 2x - 1$ در $x = 0$ تحلیلی می باشند پس $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم است. با جایگذاری y'', y', y در معادله داریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} + 2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r+1} - \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} = 0$$

با مساوی صفرقراردادن ضریب x^r، معادله شاخصی بدست می آید.

$$(r(r-1) - r)c_0 = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 0$$

جواب اول معادله را، با قراردادن $r = 2$ بدست می آوریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(m+2)c_m x^{m+2} + \sum_{m=0}^{\infty}(2m+3)c_m x^{m+3} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+4} = 0$$

$3c_1 + 3c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_0,\quad$ ضریب x^3

$8c_2 + 5c_1 + c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}c_0,\quad$ ضریب x^4

$$y_1 = c_0x^2\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - + \cdots\right)$$

چون تفاضل ریشه ها عدد صحیح است، جواب دوم معادله را بصورت زیر در نظر می گیریم.

$$y_2 = ky_1\ln x + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

$$y_2' = ky_1'\ln x + ky_1\frac{1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^{m-1}$$

$$y_2'' = ky_1''\ln x + 2ky_1'\frac{1}{x} - ky_1\frac{1}{x^2} + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)a_m x^m$$

باجایگذاری y_2'', y_2', y_2 در معادله داریم.

$$(x^2y_1'' + x(2x-1)y_1' + x(x-1)y_1)k\ln x + 2kxy_1' + 2kxy_1 - 2ky_1 + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+2} + 2\sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^{m+1}\sum_{m=0}^{\infty} m(m-2)a_m x^m = 0$$

چون y_1 جواب معادله است لذا ضریب $k\ln x$ مساوی صفر می باشد و داریم.

$$2k(3x^2 - 4x^3 + \frac{5}{2}x^4 + \cdots) + 2k(x^3 - x^4 + \frac{x^5}{2} - + \cdots)$$

$$-2k(x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} - + \cdots) + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+2} +$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(2m-1)a_m x^{m+1}\sum_{m=0}^{\infty} m(m-2)a_m x^m = 0$$

$$0a_0 = 0 \Rightarrow \text{پارامتر اختیاری} \qquad \text{ضریب } x^0$$

$$-a_0 - a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_0, \qquad \text{ضریب } x^1$$

$$4k + a_0 + a_1 + 0a_2 = 0 \Rightarrow k = 0, \quad a_2 = 0 \qquad \text{ضریب } x^2$$

$$a_1 + 3a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3}a_0, \qquad \text{ضریب } x^3$$

$$y_2 = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots \qquad a_0 = 1.$$

$$y = Ay_1 + By_2$$

۱۵) $f_1(x) = x^2, \quad f_1(0) = 0, \quad x = 0$ نقطه منفرده

$$y'' + \frac{3 - x^2}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 0$$

توابع $g(x) = 3 - x^2,\ h(x) = -3$ در $x = 0$ تحلیلی می باشند پس $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم است. با جایگذاری $y,\ y',\ y''$ در معادله داریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} + 3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r}$$
$$-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r+2} - 3\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r} = 0$$

با مساوی صفرقراردادن ضریب x^r، معادله شاخصی بدست می آید.

$$(r(r-1) + 3r - 3)c_0 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -3$$

جواب اول معادله را، با قراردادن $r = 1$ بدست می آوریم.

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(m+1)c_m x^{m+1} + 3\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)c_m x^{m+1} = 0$$
$$-\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)c_m x^{m+3} = 0 - 3\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+1} = 0$$

$$5c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0, \qquad \text{ضریب } x^2$$

$$12c_2 - c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{12}c_0, \qquad \text{ضریب } x^3$$

$$y_1 = c_0 x^2\left(1 + \frac{x^2}{12} - + \cdots\right)$$

$$y_1 = x^2\left(3 + \frac{x^2}{4} - + \cdots\right), \quad c_0 = 3$$

چون تفاضل ریشه ها عدد صحیح است، جواب دوم معادله را بصورت زیر در نظر می گیریم.

$$y_2 = ky_1 \ln x + x^{-3}\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

$$y_2' = ky_1' \ln x + ky_1\frac{1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty}(m-3)a_m x^{m-4}$$

$$y_2'' = ky_1'' \ln x + 2ky_1'\frac{1}{x} - ky_1\frac{1}{x^2} + \sum_{m=0}^{\infty}(m-3)(m-4)a_m x^{m-5}$$

باجایگذاری $y_2,\ y_2',\ y_2''$ در معادله داریم.

$$(x^2y_1'' + x(3 - x^2)y_1' - 3y_1)k\ln x + 2kxy_1' - kx^2y_1 + 2ky_1$$
$$-\sum_{m=0}^{\infty}(m-3)a_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-4)a_m x^{m-3} = 0$$

چون y_1 جواب معادله است لذا ضریب $k\ln x$ مساوی صفر می باشد و داریم.

$$2k\left(3x + \frac{3}{4}x^3 + \frac{15}{2^6}x^5 + \cdots\right) - k\left(3x^3 + \frac{1}{4}x^5 + \frac{3x^7}{2^7} - + \cdots\right)$$
$$+2k\left(3x + \frac{1}{4}x^3 + \frac{3x^4}{2^7} - + \cdots\right) - \sum_{m=0}^{\infty}(m-3)a_m x^{m-1} +$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} m(m-4)a_m x^{m-3} = 0$$

$$0a_0 = 0 \Rightarrow \text{پارامتر اختیاری} \qquad \text{ضریب } x^{-3}$$

$$-3a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0, \qquad \text{ضریب } x^{-2}$$

$-۳a_۰ - ۴a_۲ = ۰ \Rightarrow a_۲ = \frac{۳}{۴}a_۰ \quad x^{-۱}$ ضریب

$۲a_۱ + ۰a_۴ = ۰ \Rightarrow a_۴ = ۰, \quad x^۰$ ضریب

$۶k + ۶k + a_۲ + ۰a_۴ = ۰ \Rightarrow k = -\frac{۱}{۱۶}, \quad x^۱$ ضریب

$$y_۲ = \frac{-۱}{۱۶} y_۱ \ln x + x^{-۳}\left(۱ + \frac{۳}{۴}x^۲ + \cdots\right)$$

$$y = Ay_۱ + By_۲$$

مجموعه مسائل ۵.۴

۱) مطلوب است مقدار

$a)\ \Gamma\left(-\frac{۵}{۲}\right) \qquad b)\ \frac{\Gamma(۷)}{\Gamma(۴)} \qquad c)\ \Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)\Gamma\left(\frac{۳}{۲}\right)$

مقدار انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۲) $\int_۰^۱ x \ln^۳ x \, dx$

۳) $\int_۰^۱ \sqrt{x} \ln x \, dx$

۴) $\int_۰^۱ x^{۵/۲} \ln^۲ x \, dx$

۵) $\int_۰^\infty x^{۳/۲} e^{-۴x} \, dx$

۶) $\int_۰^\infty \sqrt{x} e^{-۲x^۲} \, dx$

۷) $\int_۰^\infty x^{۱/۵} e^{-۲\sqrt{x}} \, dx$

۸) $\int_۰^۱ (-\ln x)^{-۱/۲} \, dx$

جواب مجموعه مسائل ۵.۴

۱) a) $\frac{-۵}{۲}\Gamma\left(-\frac{۵}{۲}\right) = \Gamma\left(-\frac{۳}{۲}\right), \quad \frac{-۳}{۲}\Gamma\left(-\frac{۳}{۲}\right) = \Gamma\left(-\frac{۱}{۲}\right)$

$\frac{-۱}{۲}\Gamma\left(-\frac{۱}{۲}\right) = \Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma\left(-\frac{۵}{۲}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(-\frac{۵}{۲}\right)\left(-\frac{۳}{۲}\right)\left(-\frac{۱}{۲}\right)} = -\frac{۸}{۱۵}\sqrt{\pi}$$

b) $\frac{\Gamma(۷)}{\Gamma(۴)} = \frac{۶!}{۳!} = ۱۲۰$

c) $\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)\Gamma\left(\frac{۳}{۲}\right) = \sqrt{\pi}\frac{۱}{۲}\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{\pi}{۲}$

۲) $x = e^{-t}, \quad dx = -e^{-t}\,dt, \quad \int_۰^۱ x\ln^۳ x\,dx =$

$\int_\infty^۰ e^{-t}(-t)^۳(-e^{-t})\,dt = -\int_۰^\infty e^{-۲t}t^۳\,dt$

$X = ۲t, \quad dt = \frac{۱}{۲}\,dX, \quad -\int_۰^\infty e^{-۲t}t^۳\,dt =$

$-\frac{۱}{۲^۴}\int_۰^\infty e^{-X}X^۳\,dX = -\frac{۱}{۲^۴}\Gamma(۴) = -\frac{۳!}{۲^۴}$

۳) $x = e^{-t}, \quad dx = -e^{-t}\,dt, \quad \int_۰^۱ \sqrt{x}\ln x\,dx =$

$\int_\infty^۰ e^{-t/۲}(-t)(-e^{-t})\,dt = -\int_۰^\infty e^{-۳t/۲}t\,dt$

$X = \frac{۳t}{۲}, \quad dt = \frac{۲}{۳}\,dX, \quad -\int_۰^\infty e^{-۳t/۲}t\,dt = -\frac{۴}{۹}\int_۰^\infty e^{-X}X\,dX =$

$-\frac{۴}{۹}\Gamma(۲) = -\frac{۴}{۹}\times ۱ = -\frac{۴}{۹}$

۴) $x = e^{-t}, \quad dx = -e^{-t}\,dt, \quad \int_۰^۱ x^{۵/۲}\ln^۲ x\,dx =$

$\int_\infty^۰ e^{-۵t/۲}(-t)^۲(-e^{-t})\,dt = \int_۰^\infty e^{-۷t/۲}t^۲\,dt$

$X = \frac{۷t}{۲}, \quad dt = \frac{۲}{۷}\,dX, \quad \int_۰^\infty e^{-۷t/۲}t^۲\,dt = \frac{۸}{۷^۳}\int_۰^\infty e^{-X}X^۲\,dX =$

$\frac{۸}{۷^۳}\Gamma(۳) = \frac{۸}{۷^۳}\times ۲! = \frac{۱۶}{۷^۳}$

۵) $۴x = X, \quad dx = \frac{۱}{۴}\,dX, \quad \int_۰^\infty x^{۳/۲}e^{-۴x}\,dx =$

$\frac{۱}{۳۲}\int_۰^\infty X^{۳/۲}e^{-X}\,dX =$

$\frac{۱}{۳۲}\Gamma(۵/۲) = \frac{۱}{۳۲}\frac{۳}{۲}\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}$

۶) $۳x^۲ = X, \quad ۶x\,dx = dX, \quad \int_۰^\infty \sqrt{x}e^{-۳x^۲}\,dx =$

$\frac{۳^{۱/۴}}{۶}\int_۰^\infty X^{-۱/۴}e^{-X}\,dX = \frac{۳^{۱/۴}}{۶}\Gamma(۳/۴)$

۷) $۲\sqrt{x} = X, \quad \frac{۱}{\sqrt{x}}\,dx = dX, \quad \int_۰^\infty x^{۱/۵}e^{-۲\sqrt{x}}\,dx =$

$\frac{۱}{۲^{۷/۵}}\int_۰^\infty X^{۷/۵}e^{-X}\,dX = \frac{۱}{۲^{۷/۵}}\Gamma(۱۲/۵)$

۸) $-\ln x = X, \quad dx = -e^{-X}\,dX, \quad \int_\infty^۰ (X)^{-۱/۲}e^{-X}\,(-dX) =$

$\int_۰^\infty (X)^{-۱/۲}e^{-X}\,dX = \Gamma(۱/۲) = \sqrt{\pi}$

مجموعه مسائل ۶.۴

۱) فرمول (۱۱) را اثبات کنید.

۲) نشان دهید

$$۲)\ J_{۱/۲}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}} \sin x, \qquad J_{-۱/۲}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}} \cos x$$

$$۳)\ J_{۳/۲}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{x} \right),$$

$$J_{-۳/۲}(x) = -\sqrt{\frac{۲}{\pi x}} \left(\frac{x \sin x + \cos x}{x} \right)$$

$$۴)\ J_{۵/۲}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}} \left(\frac{(۳ - x^۲) \sin x - ۳x \cos x}{x^۲} \right)$$

$$J_{-۵/۲}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}} \left(\frac{۳x \sin x + (۳ - x^۲) \cos x}{x^۲} \right)$$

۵) $J_۲(x)$ را بر حسب $J_۰(x)$ و $J_۱(x)$ بنویسید.

۶) انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$a)\ \int x^۳ J_۲(x)\, dx \qquad b)\ \int_۰^۱ x^۳ J_۰(x)\, dx$$

$$c)\ \int x^۲ J_۰(x)\, dx$$

۷) $J_۵(x)$ را بر حسب $J_۰(x)$ و $J_۱(x)$ بنویسید.

جواب مجموعه مسائل ۶.۴

$$۱)\ \left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right)' = \left(\sum_{m=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^m}{۲^{۲m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + ۱)} x^{۲m} \right)' =$$

$$\sum_{m=۰}^{\infty} \frac{۲m(-۱)^m}{۲^{۲m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + ۱)} x^{۲m-۱} =$$

$$x \sum_{m=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^m}{۲^{۲m+\nu-۱} (m-۱)! \Gamma(\nu + m + ۱)} x^{۲m-۲} =$$

$$x^{-\nu} x^{\nu+۱} \sum_{m=۰}^{\infty} \frac{-(-۱)^{m-۱}}{۲^{۲(m-۱)+\nu+۱} (m-۱)! \Gamma(\nu + ۱ + (m-۱) + ۱)} x^{۲(m-۱)} =$$

$$-x^{-\nu} x^{\nu+۱} \sum_{s=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^s}{۲^{۲s+\nu+۱} s! \Gamma(\nu + ۱ + s + ۱)} x^{۲s} = -x^{-\nu} J_{\nu+۱}(x)$$

$$۲)\ J_{۱/۲}(x) = x^{۱/۲} \sum_{m=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^m}{۲^{۲m+۱/۲} m! \Gamma(۱/۲ + m + ۱)} x^{۲m} =$$

$$x^{۱/۲} \left[\frac{۱}{\sqrt{۲} \frac{۱}{۲} \sqrt{\pi}} + \frac{-x^۲}{۲^۲ \sqrt{۲} \frac{۳}{۲} \frac{۱}{۲} \sqrt{\pi}} + \frac{x^۴}{۲^۴ ۲! \sqrt{۲} \frac{۵}{۲} \frac{۳}{۲} \frac{۱}{۲} \sqrt{\pi}} + \cdots \right] =$$

$$x^{-۱/۲} \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \left(x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \cdots \right) = \sqrt{\frac{۲}{x\pi}} \sin x$$

$$J_{-۱/۲}(x) = x^{-۱/۲} \sum_{m=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^m}{۲^{۲m-۱/۲} m! \Gamma(-۱/۲ + m + ۱)} x^{۲m} =$$

$$x^{-۱/۲} \left[\frac{۱}{۲^{-۱/۲} \sqrt{\pi}} + \frac{-x^۲}{۲^۲ ۲^{-۱/۲} \frac{۱}{۲} \sqrt{\pi}} + \frac{x^۴}{۲^۴ ۲! ۲^{-۱/۲} \frac{۳}{۲} \frac{۱}{۲} \sqrt{\pi}} + \cdots \right] =$$

$$x^{-۱/۲} \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \left(۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots \right) = \sqrt{\frac{۲}{x\pi}} \cos x$$

$$۳)\ J_{۳/۲}(x) = \frac{۱}{x} J_{۱/۲}(x) - J_{-۱/۲}(x) = \sqrt{\frac{۲}{x\pi}} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{x} \right)$$

$$J_{-۳/۲}(x) = \frac{-۱}{x} J_{-۱/۲}(x) - J_{۱/۲}(x) = -\sqrt{\frac{۲}{x\pi}} \left(\frac{x \sin x + \cos x}{x} \right)$$

۴) $J_{۵/۲}(x) = \frac{۳}{x}J_{۳/۲}(x) - J_{۱/۲}(x) = \sqrt{\frac{۲}{x\pi}}\left(\frac{۳}{x}\frac{\sin x - x\cos x}{x} - \sin x\right) =$

$\sqrt{\frac{۲}{x\pi}}\left(\frac{(۳ - x^{۲})\sin x - ۳x\cos x}{x^{۲}}\right)$

$J_{-۵/۲}(x) = \frac{-۳}{x}J_{-۳/۲}(x) - J_{-۱/۲}(x) =$

$= \sqrt{\frac{۲}{x\pi}}\left(\frac{-۳}{x}\frac{\sin x - x\cos x}{x} - \cos x\right) =$

$\sqrt{\frac{۲}{x\pi}}\left(\frac{۳x\sin x + (۳ - x^{۲})\cos x}{x^{۲}}\right)$

۵) $J_{\nu+۱}(x) = \frac{۲\nu}{x}J_{\nu}(x) - J_{\nu-۱}(x)$

$J_{۳}(x) = \frac{۴}{x}J_{۲}(x) - J_{۱}(x) = \frac{۴}{x}\left(\frac{۲}{x}J_{۱}(x) - J_{۰}(x)\right) - J_{۱}(x)$

$\left(\frac{۸ - x^{۲}}{x^{۲}}\right)J_{۱}(x) - \frac{۴}{x}J_{۰}(x)$

۶) a) $\int x^{\nu}J_{\nu-۱}\,dx = x^{\nu}J_{\nu} + c$

$\int x^{۳}J_{۲}\,dx = x^{۳}J_{۳} + c$

b) $\int_{۰}^{۱} x^{۳}J_{۰}\,dx = \int_{۰}^{۱} x^{۲}(xJ_{۰})\,dx = x^{۳}J_{۱}\Big|_{۰}^{۱} - ۲\int_{۰}^{۱} x^{۲}J_{۱}\,dx =$

$J_{۱}(۱) - ۲x^{۲}J_{۲}\Big|_{۰}^{۱} = J_{۱}(۱) - ۲J_{۲}(۱) = J_{۱}(۱) - ۲(۲J_{۱}(۱) - J_{۰}(۱)) =$

$۲J_{۰}(۱) - ۳J_{۱}(۱)$

c) $\int x^{۲}J_{۰}\,dx = \int x(xJ_{۰})\,dx = x^{۲}J_{۱} - \int xJ_{۱}\,dx$

$\int xJ_{۱}\,dx = x(-J_{۰}) + \int J_{۰}\,dx$

$\int x^{۲}J_{۰}\,dx = x^{۲}J_{۱} + xJ_{۰} - \int J_{۰}\,dx$

۷) $J_{۵} = \frac{۸}{x}J_{۴} - J_{۳} = \frac{۸}{x}\left(\frac{۶}{x}J_{۳} - J_{۲}\right) - \frac{۴}{x}J_{۲} + J_{۱} =$

$\frac{۸}{x}\left[\frac{۶}{x}\left[\frac{۴}{x}\left(\frac{۲}{x}J_{۱} - J_{۰}\right) - J_{۱} - \frac{۲}{x}J_{۱} - J_{۰}\right]\right] - \frac{۴}{x}\left(\frac{۲}{x}J_{۱} - J_{۰}\right) + J_{۱} =$

$\left(\frac{۳۸۴}{x^{۴}} - \frac{۷۲}{x^{۲}} + ۱\right)J_{۱} - \left(\frac{۱۹۲}{x^{۳}} - \frac{۱۲}{x}\right)J_{۰}$

مجموعه مسائل ۷.۴

۱) حالت (چ) را اثبات کنید.

۲) نشان دهید معادله دیفرانسیل زیر با استفاده از تغییرمتغیر داده شده قابل تبدیل به معادله بسل می باشد و فرم جواب عمومی آنرا بنویسید.

$$y''+(e^{x}-k^{۲})y=۰,\quad u=۲e^{x/۲},\ \ e^{x}=u^{۲}/۴$$

۳) معادلات زیر را حل کنید.

$a)\ y''+(e^{x}-۹)y=۰$ $\quad b)\ y''+\left(e^{x}-\frac{۱}{۴}\right)y=۰$

$c)\ y''+\left(e^{x}-\frac{۱}{۹}\right)y=۰$

۴) معادلات زیر را بااستفاده از تغییر متغیر داده شده حل کنید.

۴) $y''+e^{۲x}y=۰,\quad u=e^{x}$

۵) $x^{۲}y''+xy'+(۹x^{۲}-۴)y=۰,\quad z=۳x$

۶) $x^{۲}y''+xy'+(۳x^{۲}-۱)y=۰,\quad z=\sqrt{۳x}$

۷) $۴x^{۲}y''+۴xy'+(x-۳)y=۰,\quad z=x^{۱/۲}$

۸) $x^{۲}y''+xy'+۴(x^{۴}-۸)y=۰,\quad z=x^{۲}$

۹) $x^{۲}y''+xy'+۴(x^{۴}-۱)y=۰,\quad z=x^{۲}$

۱۰) $xy''+۵y'+xy=۰,\quad y=x^{-۲}u$

۱۱) $xy''+۳y'+xy=۰,\quad y=x^{-۱}u$

۱۲) $y''+\left(۱-\frac{۷}{۴x^{۲}}\right)y=۰,\quad y=x^{۱/۲}u$

۱۳) $y''+\left(۱-\frac{۳}{۴x^{۲}}\right)y=۰,\quad y=x^{۱/۲}u$

۱۴) $x^{۲}y''-۳xy'+۴(x^{۴}-۳)y=۰,\quad y=x^{۲}u,\quad x^{۲}=z$

۱۵) $x^{۲}y''-۵xy'+۹(x^{۶}-۸)y=۰,\quad y=x^{۳}u,\quad x^{۳}=z$

۱۶) $y''+۲x^{۲}y=۰,\quad y=x^{۱/۲}u,\quad z=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x^{۲}$

۱۷) $y''+۹x^{۴}y=۰,\quad y=x^{۱/۲}u,\quad z=x^{۳}$

۱۸) $y''+۱۶xy=۰,\quad y=x^{۱/۲}u,\quad z=\frac{۸}{۳}x^{۳/۲}$

۱۹) $x^{۲}y''-۳xy'+(۳۶x^{۶}-۵)y=۰,\quad y=x^{۲}u,\quad z=۲x^{۳}$

۲۰) $x^{۲}y''-xy'+(۳۶x^{۴}-۱۵)y=۰,\quad y=xu,\quad z=۳x^{۲}$

۲۱) جواب عمومی معادلات زیر را بنویسید.

$a)\ x^{۲}y''+xy'-(x^{۲}+۴)y=۰$

$b)\ x^{۲}y''+xy'-(x^{۲}+۱)y=۰$

$$u^2\frac{d^2y}{du^2}+u\frac{dy}{du}+(u^2-(2k)^2)y=0$$

$$y=AJ_{2k}(u)+BY_{2k}(u)=AJ_{2k}(2e^{x/2})+BY_{2k}(2e^{x/2})$$

۳) a) مشابه ۲ با $k=3$

$$y=AJ_6(2e^{x/2})+BY_6(2e^{x/2})$$

b) مشابه ۲ با $k=1/2$

$$y=AJ_1(2e^{x/2})+BY_1(2e^{x/2})$$

c) مشابه ۲ با $k=1/3$

$$y=AJ_{2/3}(2e^{x/2})+BY_{2/3}(2e^{x/2})$$

۴) $u=e^x,\quad \frac{du}{dx}=e^x\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=e^x\frac{dy}{du}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^x\frac{dy}{du}+e^{2x}\frac{d^2y}{du^2}$$

$$y''+e^{2x}y=u^2\frac{d^2y}{du^2}+u\frac{dy}{du}+(u^2-0)y=0$$

$$y=AJ_0(u)+BY_0(u)=AJ_0(e^x)+BY_0(e^x)$$

۵) $z=3x,\quad \frac{dz}{dx}=3\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=3\frac{dy}{dz}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=9\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$x^2y''+xy'+(9x^2-4)y=z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-4)y=0$$

$$y=AJ_2(z)+BY_2(z)=AJ_2(3x)+BY_2$$

جواب مجموعه مسائل ۷.۴

۱) $\frac{dz}{dx}=\sqrt{a}x^{b/2}$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-1/2}u+x^{1/2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dz}\times\frac{dz}{dx}=\sqrt{a}x^{b/2}\frac{du}{dz}$$

$$y'=\frac{1}{2}x^{-1/2}u+\sqrt{a}x^{(b+1)/2}\frac{du}{dz}$$

$$y''=\frac{-1}{4}x^{-3/2}u+\frac{1}{2}x^{(b-1)/2}\sqrt{a}\,\frac{du}{dz}+$$

$$\frac{(b+1)\sqrt{a}}{2}x^{(b-1)/2}\frac{du}{dz}+\sqrt{a}x^{(b+1)/2}\sqrt{a}x^{b/2}\frac{d^2u}{dz^2}$$

$$y''+ax^by=0\Rightarrow\frac{-1}{4}x^{-3/2}u+\frac{1}{2}x^{(b-1)/2}\sqrt{a}(1+b+1)\,\frac{du}{dz}+$$

$$\sqrt{a}x^{(b+1)/2}\sqrt{a}x^{b/2}\frac{d^2u}{dz^2}$$

$$+ax^{b+1/2}u=0\Rightarrow z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}+(z^2-(b+2)^{-2})u=0$$

$$u=AJ_{1/(b+2)}(z)+BY_{1/(b+2)}(z)$$

$$y=x^{1/2}\left(AJ_{1/(b+2)}\left(\frac{2\sqrt{a}}{b+2}(x^{b+2})^{1/2}\right)+BY_{1/(b+2)}\left(\frac{2\sqrt{a}}{b+2}(x^{b+2})^{1/2}\right)\right)$$

۲) $u=2e^{x/2},\quad \frac{du}{dx}=e^{x/2}=\frac{u}{2}$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{u}{2}\frac{dy}{du}$$

$$y''=\frac{u}{4}\frac{dy}{du}+\frac{u^2}{4}\frac{d^2y}{du^2}$$

$$y''+(e^x-k^2)y=\frac{u^2}{4}\frac{d^2y}{du^2}+\frac{u}{4}\frac{dy}{du}+(\frac{u^2}{4}-k^2)y=$$

۶) مشابه ۵ می باشد.

۷) $z = x^{1/2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2}\frac{dy}{dz}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{4}x^{-3/2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{4}x^{-1}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$4x^2y'' + 4xy' + (x-3)y = z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2-3)y = 0$$

$$y = AJ_{\sqrt{3}}(z) + BY_{\sqrt{3}}(z) = AJ_{\sqrt{3}}(x^{1/2}) + BY_{\sqrt{3}}(x^{1/2})$$

۸) $z = x^2, \quad \frac{dz}{dx} = 2x \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 2x\frac{dy}{dz}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dz} + 4x^2\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$x^2y'' + xy' + 4(x^4-8)y = 4z^2\frac{d^2y}{dz^2} + 4z\frac{dy}{dz} + 4(z^2-8)y = 0$$

$$y = AJ_{\sqrt{8}}(z) + BY_{\sqrt{8}}(z) = AJ_{\sqrt{8}}(x^2) + BY_{\sqrt{8}}(x^2)$$

۹) مشابه ۸ می باشد و جواب عمومی بصورت زیر است.

$$y = AJ_1(x^2) + BY_1(x^2)$$

۱۰) $y = x^{-2}u, \quad \frac{dy}{dx} = -2x^{-3}u + x^{-2}\frac{du}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x^{-4}u - 4x^{-3}\frac{dy}{du} + x^{-2}\frac{d^2y}{du^2}$$

$$xy'' + 5y' + xy = x^{-1}\frac{d^2y}{du^2} + x^{-2}\frac{du}{dx} - 4x^{-3}u + x^{-1}u =$$

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + (x^2-4)u = 0$$

$$u = AJ_2(x) + BY_2(x), \quad y = x^{-2}\left(AJ_2(x) + BY_2(x)\right)$$

۱۱) $y = x^{-1}u, \quad \frac{dy}{dx} = -x^{-2}u + x^{-1}\frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2x^{-3}u - 2x^{-2}\frac{du}{dx} +$

$$x^{-1}\frac{d^2u}{dx^2} \Rightarrow xy'' + 3y' + xy = \frac{d^2y}{du^2} + x^{-1}\frac{du}{dx} - x^{-2}u + u =$$

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + (x^2-1)u = 0$$

$$u = AJ_1(x) + BY_1(x), \quad y = x^{-1}\left(AJ_1(x) + BY_1(x)\right)$$

۱۲) $y = x^{1/2}u, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2}u + x^{1/2}\frac{du}{dx},$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{4}x^{-3/2}u + x^{-1/2}\frac{du}{dx} + x^{1/2}\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$y'' + \left(1 - \frac{7}{4x^2}\right)y = x^{1/2}\frac{d^2u}{dx^2} + x^{-1/2}\frac{du}{dx} + \frac{-1}{4}x^{-3/2}u +$$

$$\left(1 - \frac{7}{4x^2}\right)x^{1/2}u = x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + (x^2-2)u = 0$$

$$u = AJ_{\sqrt{2}}(x) + BY_{\sqrt{2}}(x), \quad y = x^{1/2}\left(AJ_{\sqrt{2}}(x) + BY_{\sqrt{2}}(x)\right)$$

۱۳) مشابه ۱۲ داریم

$$y = x^{1/2}\left(AJ_1(x) + BY_1(x)\right)$$

۱۴) $z = x^2, \quad \frac{dz}{dx} = 2x,$

$$y = x^2u, \quad \frac{dy}{dx} = 2xu + x^2\frac{du}{dx} = 2xu + 2x^3\frac{du}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2u + 10x^2\frac{du}{dz} + 4x^4\frac{d^2u}{dz^2}$$

$$x^2y'' - 3xy' + 4(x^4-3)y = 4x^6\frac{d^2u}{dz^2} + 4x^4\frac{du}{dz} - 16x^2u + 4x^6u = 0$$

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (z^2-4)u = 0$$

$$u = AJ_2(z) + BY_2(z), \quad y = x^2\left(AJ_2(x^2) + BY_2(x^2)\right)$$

۱۵) $z = x^3, \quad \frac{dz}{dx} = 3x^2,$

$$y = x^3 u, \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 u + x^3 \frac{du}{dx} = 3x^2 u + 3x^5 \frac{du}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6xu + 24x^4 \frac{du}{dz} + 9x^7 \frac{d^2u}{dz^2}$$

$$x^2y'' - 5xy' + 9(x^6 - 8)y = 9x^9 \frac{d^2u}{dz^2} + 9x^6 \frac{du}{dz} - 81x^3 u + 9x^9 u = 0$$

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (z^2 - 9)u = 0$$

$$u = AJ_3(z) + BY_3(z), \quad y = x^3 \left(AJ_3(x^3) + BY_3(x^3)\right)$$

۱۶) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2, \quad \frac{dz}{dx} = \sqrt{2}x,$

$$y = x^{1/2}u, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2}u + x^{1/2}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2}u + \sqrt{2}x^{3/2}\frac{du}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{4}x^{-3/2}u + 2\sqrt{2}x^{1/2}\frac{du}{dz} + 2x^{5/2}\frac{d^2u}{dz^2}$$

$$y'' + 2x^2y = 2x^{5/2}\frac{d^2u}{dz^2} + 2\sqrt{2}x^{1/2}\frac{du}{dz} + \frac{-1}{4}x^{-3/2}u + 2x^{5/2}u = 0$$

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (z^2 - \frac{1}{16})u = 0$$

$$u = AJ_{1/4}(z) + BY_{1/4}(z),$$

$$y = x^{1/2}\left(AJ_{1/4}(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2) + BY_{1/4}(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2)\right)$$

۱۷) $z = x^3, \quad \frac{dz}{dx} = 3x^2,$

$$y = x^{1/2}u, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2}u + x^{1/2}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2}u + 3x^{5/2}\frac{du}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{4}x^{-3/2}u + 9x^{3/2}\frac{du}{dz} + 9x^{9/2}\frac{d^2u}{dz^2}$$

$$y'' + 9x^4y = 9x^{9/2}\frac{d^2u}{dz^2} + 9x^{3/2}\frac{du}{dz} + \frac{-1}{4}x^{-3/2}u + 9x^{9/2}u = 0$$

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (z^2 - \frac{1}{36})u = 0$$

$$u = AJ_{1/6}(z) + BY_{1/6}(z), \quad y = x^{1/2}\left(AJ_{1/6}(x^3) + BY_{1/6}(x^3)\right)$$

۱۸) $z = \frac{8}{3}x^{3/2}, \quad \frac{dz}{dx} = 4x^{1/2},$

$$y = x^{1/2}u, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2}u + x^{1/2}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2}u + 4x\frac{du}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{4}x^{-3/2}u + 6\frac{du}{dz} + 16x^{3/2}\frac{d^2u}{dz^2}$$

$$y'' + 16xy = 16x^{3/2}\frac{d^2u}{dz^2} + 6\frac{du}{dz} + \frac{-1}{4}x^{-3/2}u + 16x^{3/2}u = 0$$

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (z^2 - \frac{1}{9})u = 0$$

$$u = AJ_{1/3}(z) + BY_{1/3}(z), \quad y = x^{1/2}\left(AJ_{1/3}(\frac{8}{3}x^{3/2}) + BY_{1/3}(\frac{8}{3}x^{3/2})\right)$$

۱۹) $z = 2x^3, \quad \frac{dz}{dx} = 6x^2,$

$$y = x^2u, \quad \frac{dy}{dx} = 2xu + x^2\frac{du}{dx} = 2xu + 6x^4\frac{du}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2u + 36x^3\frac{du}{dz} + 36x^6\frac{d^2u}{dz^2}$$

$$x^2y'' - 3xy' + (36x^6 - 5)y = 36x^8\frac{d^2u}{dz^2} + 18x^5\frac{du}{dz} - 9x^2u + 36x^8u = 0$$

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (z^2 - 1)u = 0$$

$$u = AJ_1(z) + BY_1(z), \quad y = x^2\left(AJ_1(2x^3) + BY_1(2x^3)\right)$$

۲۰) $z = 3x^2, \quad \frac{dz}{dx} = 6x,$

$$y = xu, \quad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = u + 6x^2\frac{du}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 18x\frac{du}{dz} + 36x^3\frac{d^2u}{dz^2}$$

$$x^2y'' - xy' + (36x^4 - 15)y = 36x^5\frac{d^2u}{dz^2} + 12x^3\frac{du}{dz} - 16xu + 36x^5u = 0$$

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (z^2 - 4)u = 0$$

$$u = AJ_2(z) + BY_2(z), \quad y = x\left(AJ_2(3x^2) + BY_2(3x^2)\right)$$

۲۱) a) $y = AI_2(x) + BK_2(x)$

b) $y = AI_1(x) + BK_1(x)$

مسائل تکمیلی

۱) معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

a) $(x^2 - x)y'' + xy' - y = 0$

b) $(x^3 + x^2)y'' + xy' - 2xy = 0$

c) $xy'' + y' - xy = 0$ d) $xy'' - y = 0$

e) $xy'' + y' + y = 0$

۲) مقدار انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$a)\ \int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x^3}\,dx \qquad b)\ \int_0^\infty 3^{-4x^2}\,dx$$

۳) نشان دهید ($m,\ n,\ a$ اعداد مثبت می باشند).

$$a)\ \int_0^\infty x^m e^{-ax^n}\,dx = \frac{1}{na^{(m+1)/n}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

$$b)\ \int_0^\infty x^m(\ln x)^n\,dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}, \quad n \in N, \quad m > -1$$

$$c)\ \int_0^\infty e^{-ab^2}\cos cb\,db = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-c^2/4a}$$

$$d)\ \Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -\gamma$$

توابع لژاندر وبسل در کتاب معرفی شده اند، در اینجا به معرفی چند تابع مهم دیگر می پردازیم.

معادله هرمیت

صورت کلی این معادله بفرم $y'' - 2xy' + 2\nu y = 0$ می باشد، هرگاه $\nu = n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ باشد، یک چند جمله‌ای از درجه n در معادله صدق می کند و بسته به زوج یا فرد بودن n، این چند جمله ای فقط شامل توانهای زوج یا فرد می باشد،

این چند جمله ایها را با $H_n(x)$ نشان می دهیم. این چند جمله ایها را می توان با استفاده از روابط زیر بدست آورد.

الف: فرمول ردریگس

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

ب: تابع مولد

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}t^n$$

پ: روابط بازگشتی

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

ت: روابط مهم

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x)\, dx = 0 \quad m \neq n$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$$

بسط تابع $f(x)$ بر حسب چند جمله ایهای هرمیت.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k H_k(x)$$

$$A_k = \frac{1}{2^k k!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)H_k(x)\, dx$$

۴) جواب چند جمله ای معادلات زیر را بنویسید.

$$a)\ y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad b)\ y'' - 2xy' + 6y = 0$$

۵) تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ بر حسب چند جمله ای هرمیت بیان کنید.

۶) نشان دهید $H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{n!}$.

معادله لاگر

صورت کلی این معادله بفرم $xy'' + (1-x)y' + \nu y = 0$ می باشد، هرگاه $\nu = n = 0, 1, 2, 3, \dots$ باشد، یک چند جمله‌ای از درجه n در معادله صدق می کند، این چند جمله ایها را با $L_n(x)$ نشان می دهیم. این چند جمله ایها را می توان با استفاده از روابط زیر بدست آورد.

الف: فرمول ردریگس

$$L_n(x) = e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

ب: تابع مولد

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!}t^n$$

پ: روابط بازگشتی

$$L_{n+1}(x) = (2n + 1 - x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$$

$$nL_{n-1}(x) = nL'_{n-1}(x) - L'_n(x)$$

ت: روابط مهم

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x)L_n(x)\, dx = 0, \qquad m \neq m$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n^2(x)\, dx = (n!)^2,$$

بسط تابع $f(x)$ بر حسب چند جمله ایهای لاگر:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k L_k(x)$$

$$A_k = \frac{۱}{(k!)^۲}\int_۰^\infty e^{-x} f(x) L_k(x)\, dx$$

معادله چبیشف

صورت کلی این معادله بفرم $(۱ - x^۲)y'' - xy' + (\nu)^۲ y = ۰$ می باشد، هرگاه $\nu = n = ۱, ۲, ۳, \cdots$ باشد، چند جمله‌ایهای از درجه n در معادله صدق می کند، این چند جمله ایها را با $T_n(x), \quad U_{n-۱}(x)$ نشان می دهیم. $T_n(x)$ را چند جمله‌ای چبیشف نوع اول و U_n را چند جمله‌ای نوع دوم می نامیم. جواب عمومی این معادله بفرم زیر است.

$$y = \begin{cases} AT_n(x) + B\sqrt{۱ - x^۲}\,U_{n-۱}(x) & n = ۱, ۲, ۳, \cdots \\ A + B\sin^{-۱} x & n = ۰ \end{cases}$$

این چند جمله ایها را می توان با استفاده از روابط زیر بدست آورد.

$$T_n(x) = (x)^n - \begin{pmatrix} n \\ ۲ \end{pmatrix} x^{n-۲}(۱ - x^۲) + \begin{pmatrix} n \\ ۴ \end{pmatrix} x^{n-۴}(۱ - x^۲)^۲ - \cdots$$

$$U_n(x) = \begin{pmatrix} n+۱ \\ ۱ \end{pmatrix} x^n - \begin{pmatrix} n+۱ \\ ۳ \end{pmatrix} x^{n-۲}(۱ - x^۲)$$

$$+ \begin{pmatrix} n+۱ \\ ۵ \end{pmatrix} x^{n-۴}(۱ - x^۲)^۲ - \cdots$$

تابع مولد

$$\frac{۱ - tx}{۱ - ۲xt + t^۲} = \sum_{n=۰}^{\infty} T_n(x) t^n$$

$$\frac{۱}{۱ - ۲xt + t^۲} = \sum_{n=۰}^{\infty} U_n(x) t^n$$

روابط بازگشتی

$$T_{n+۱}(x) = ۲xT_n(x) - T_{n-۱}(x)$$

$$U_{n+۱}(x) = ۲xU_n(x) - U_{n-۱}(x)$$

روابط مهم

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-۱}(x)$$

$$(۱ - x^۲)U_{n-۱}(x) = xT_n(x) - T_{n+۱}(x)$$

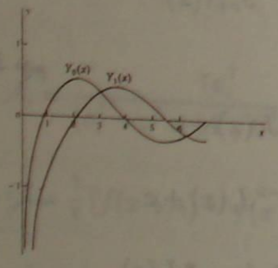
نکاتی در مورد معادله بسل

در کتاب معادلات دیفرانسیل، معادله بسل بفرم زیر معرفی شد.

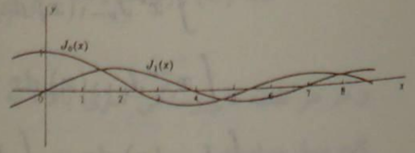
$$x^۲y'' + xy' + (x^۲ - \nu^۲)y = ۰$$

جواب عمومی آن نیز بفرم $y = AJ_\nu(x) + Y_\nu(x)$ داده شد، $J_\nu(x)$ را تابع بسل نوع اول و $Y_\nu(x)$ را تابع بسل نوع دوم نامیدیم. در اینجا بعضی از خواص و روابط بین جوابها را بررسی می کنیم. برخی از این روابط در کتاب نیز آورده شده اند.

شکل زیر نمودارهای توابع $J_۰(x)$ و $J_۱(x)$ رانشان می دهد. شباهت آنها با نمودارهای $\sin x$ و $\cos x$ جالب توجه است و به این نکته اشاره دارد که $J_\nu(x)$ برای هر ν دارای بینهایت ریشه است. نمودار توابع $Y_۰(x)$ و $Y_۱(x)$ نیز اشاره به این نکته دارد که $Y_\nu(x)$ برای هر ν دارای بینهایت ریشه است.



توابع بسل نوع دوم $Y_0(x)$ و $Y_1(x)$



توابع بسل نوع اول $J_0(x)$ و $J_1(x)$

فرمولهای مجانبی

برای مقادیر بزرگ x روابط زیر را داریم.

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2}\right),\quad Y_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2}\right)$$

تابع مولد

$$e^{\frac{x}{2}(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

روابط بازگشتی

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x)$$

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\right)$$

$$xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x)$$

$$xJ'_\nu(x) = xJ_{\nu-1}(x) - \nu J_\nu(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

روابط مهم

$$\int x^\nu J_{\nu-1}(x)\,dx = x^\nu J_\nu(x) + c$$

$$\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\,dx = -x^{-\nu} J_\nu(x) + c$$

$$\int J_{\nu+1}(x)\,dx = \int J_{\nu-1}(x)\,dx - 2J_\nu(x)$$

توجه روابط بیان شده در دو قسمت روابط بازگشتی و روابط مهم، بدون تغییر برای $Y_\nu(x)$ نیز برقرار می باشد.

تعامد توابع بسل

اگر a, b دو ثابت متفاوت باشند. داریم

$$\int_0^1 xJ_\nu(ax)J_\nu(bx)\,dx = \frac{bJ_\nu(a)J'_\nu(b) - aJ_\nu(b)J'_\nu(a)}{a^2 - b^2}$$

$$\int_0^1 xJ_\nu^2(ax)\,dx = \frac{1}{2}\left[J_\nu'^2(a) + \left(1 - \frac{\nu^2}{a^2}\right)J_\nu^2(a)\right]$$

اگر a, b هر دو ریشه متفاوت معادله $AJ_\nu(x) + BxJ'_\nu(x) = 0$ باشند.(A, B دو ثابت هستند) داریم

$$\int_0^1 xJ_\nu(ax)J_\nu(bx)\,dx = 0$$

بعبارت دیگر، توابع $\sqrt{x}J_\nu(ax),\ \sqrt{x}J_\nu(bx)$ در فاصله $(0,1)$ متعامد هستند.

اگر تابع $f(x)$ در شرایط قضیه دیریکله صدق کند، آنگاه در هر نقطه پیوستگی تابع، در فاصله $0 < x < 1$ داریم

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_\nu(a_i x)$$

که در آن a_i ها ریشه‌های مثبت معادله $AJ_\nu(x) + BxJ'_\nu(x) = 0$ با شرط $A/B \geq 0$ هستند و

$$A_i = \frac{2a_i^2}{(a_i^2 - \nu^2 + A^2/B^2)J_\nu^2(a_i)}\int_0^1 xJ_\nu(a_i x)f(x)\,dx$$

و در هر نقطه نا پیوستگی سری بالا، به $\frac{1}{2}(f(x+0) - f(x-0))$ همگرا می باشد.

تابع بسل پیراسته

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0$$

جواب عمومی آن بفرم $y = AI_\nu(x) + BK_\nu(x)$ بیان می شود. توابع $I_\nu(x)$ و $K_\nu(x)$ به توابع بسل پیراسته نوع اول و دوم معروفند.

تابع مولد

$$e^{\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n$$

روابط بازگشتی

$$I_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x}I_\nu(x) + I_{\nu-1}(x)$$

$$I'_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)\right)$$

$$xI'_\nu(x) = -\nu I_\nu(x) + xI_{\nu-1}(x)$$

$$xI'_\nu(x) = \nu I_\nu(x) + I_{\nu+1}(x)$$

$$K_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}K_\nu(x) + K_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu I_\nu(x)\right) = x^\nu I_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} I_\nu(x)\right) = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu K_\nu(x)\right) = -x^\nu K_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} K_\nu(x)\right) = -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x)$$

اگر $\nu = n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ داریم.

$$I_{-n}(x) = I_n(x), \quad K_{-n}(x) = K_n(x)$$

۱۰) انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$a)\ \int x^4 J_1(x)\, dx \qquad b)\ \int x^3 J_3(x)\, dx \qquad c)\ \int \frac{J_2(3x)}{x^2}\, dx$$

۱۱) نشان دهید که

$$\left(xJ_\nu(x)J_{\nu+1}(x)\right)' = x\left(J_\nu^2(x) - j_{\nu=1}^2(x)\right)$$

بطورکلی، انتگرال بفرم $\int x^m J_n(x)\, dx$ که در آن m, n اعداد صحیح باشند و $m+n \geq 0$ در صورتی کاملا" حساب می شوند که $m+n$ فرد باشد، اگر $m+n$ زوج باشد جواب شامل $\int J_0(x)\, dx$ خواهد بود.

۱۲) نشان دهید که

$$\int_0^{\pi/2} J_0(x\cos\alpha)\cos\alpha\, d\alpha = \frac{\sin x}{x}$$

۱۳) نشان دهید که

$a)\ 4J''_\nu(x) = J_{\nu-2}(x) - 2J_\nu(x) + J_{\nu+2}(x)$

$b)\ 8J'''_\nu(x) = J_{\nu-3}(x) - 3J_{\nu-1}(x) + 3J_{\nu+1}(x) - J_{\nu+3}(x)$

$c)\ I''_\nu(x) = \left(\frac{\nu(\nu+1)}{x^2} - 1\right)J_\nu(x) - \frac{1}{x}J_{\nu-1}(x)$

$d)\ \int J_0(x)\, dx = 2\left(J_1(x) + J_3(x) + J_5(x) + \cdots\right)$

$e)\ \int J_0(x)\cos x\, dx = xJ_0(x)\cos x + xJ_1(x)\sin x + c$

$f)\ \int J_0(x)\sin x\, dx = xJ_0(x)\sin x - xJ_1(x)\cos x + c$

$g)\ \int J_1(x)\cos x\, dx = xJ_1(x)\cos x - xJ_0(x)\sin x - J_0(x)\cos x + c$

$h)\ \int xJ_0(x)\cos x\, dx =$

$$\frac{۱}{۳}\left\{x^۲\left(J_۰(x)\cos x + J_۱(x)\sin x\right) + xJ_۱(x)\cos x\right\}$$

i) $\int xJ_۱(x)\sin x\,dx =$

$$\frac{۱}{۳}\left\{x^۲\left(J_۰(x)\cos x + J_۱(x)\sin x\right) - ۲xJ_۱(x)\cos x\right\}$$

j) $\cos(x\sin\alpha) = J_۰(x) + ۲J_۲(x)\cos ۲\alpha + ۲J_۴(x)\cos ۴\alpha + \cdots$

k) $\sin(x\sin\alpha) = ۲J_۱(x)\sin\alpha + ۲J_۳(x)\sin ۳\alpha + ۲J_۵(x)\sin ۵\alpha + \cdots$

l) $J_n(x) = \frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi}\cos(n\alpha - x\sin\alpha)\,d\alpha$

m) $\int J_۱(x^{۱/۳})\,dx = ۶x^{۱/۳}J_۱(x^{۱/۳}) - ۳x^{۲/۳}J_۰(x^{۱/۳}) + c$

n) $\sinh x = ۲\left(I_۱(x) + I_۳(x) + \cdots\right)$

o) $\cosh x = I_۰(x) + ۲\left(I_۲(x) + I_۴(x) + \cdots\right)$

p) $I_{۱/۲}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\sinh x,\quad I_{-۱/۲}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\cosh x,$

q) $I_{۳/۲}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\left(\cosh x - \frac{\sinh x}{x}\right),$

$$I_{-۳/۲}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\left(\sinh x - \frac{\cosh x}{x}\right)$$

r) $\int xJ_n^۲(ax)\,dx =$

$$\frac{x^۲}{۲}\left(J_n^۲(ax) + J_{n+۱}^۲(ax)\right) - \frac{nx}{a}J_n(ax)J_{n+۱}(ax) + c$$

جواب مسائل تکمیلی

۱) a) $y = c_۰x - c_۱x\ln x + c_۱\left(۱ + x - \sum_{n=۲}^{\infty}\frac{x^n}{n-۱}\right)$

b) $y = (c_۰x + c_۱\ln x)(۱ + ۲x + x^۲) +$
$c_۱\left(-۳x - ۳x^۲ + \sum_{n=۳}^{\infty}\frac{(-۱)^n ۲x^n}{n(n-۱)(n-۲)}\right)$

c) $y = (c_۰x + c_۱\ln x)\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲n}\frac{۱}{(n!)} - c_۱\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲n}\frac{۱}{(n!)}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{k}$

d) $y = (c_۰x + c_۱\ln x)\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{x^n}{(n-۱)!n!} +$
$c_۱\left[۱ - \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{x^n}{(n-۱)!n!}\left(\frac{۱}{n} + \sum_{k=۱}^{n-۱}\frac{۲}{k}\right)\right]$

e) $y = (c_۰x + c_۱\ln x)\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^n}{(n!)^۲} - c_۱\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^n}{(n!)^۲}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۲}{k}$

۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{۳}$, b) $\frac{\sqrt{\pi}}{۴\sqrt{\ln ۳}}$

۳) a) $۲x$, b) $۸x^۳ - ۱۲x$

۴) $\frac{-۳}{۲}H_۰(x) + \frac{۷}{۴}H_۱(x) - \frac{۳}{۴}H_۲(x) + \frac{۱}{۸}H_۳(x)$

۷) a) $۲ - ۴x + x^۲$, b) $۶ - ۱۸x + ۹x^۲ - x^۳$

۸) $۲۴ - ۹۶x + ۷۲x^۲ - ۱۶x^۳ + x^۵$

۹) $۲L_۰(x) - ۸L_۱(x) + ۶L_۲(x) - L_۳(x)$

۱۰) a) $(۸x^۲ - x^۴)J_۰(x) + (۴x^۳ - ۱۶x)J_۱(x)$

b) $-x^۳J_۲(x) - ۵x^۲J_۱(x) - ۱۵xJ_۰(x) + ۱۵\int J_۰(x)\,dx$

c) $-\frac{J_۲(۳x)}{۳x} - J_۱(۳x) + ۳\int J_۰(۳x)\,dx$

فصل ۵

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

مجموعه مسائل فصل ۵

دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = 4y_1 - 2y_2 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + 2e^x \\ y_2' = 4y_1 + y_2 - e^x \end{cases}$

۳) $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 2y_2 + 2x \\ y_2' = 8y_1 - 4y_2 + 1 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 - e^{-x}\sin x \\ y_2' = 4y_1 - y_2 + 2e^{-x}\cos x \end{cases}$

۵) $\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2, \quad y_1(0) = 1 \\ y_2' = 2y_1 - 5y_2, \quad y_2(0) = 0 \end{cases}$

۶) $\begin{cases} (D^2 - 3D + 2)y_1 + (D - 1)y_2 = 0 \\ (D - 2)y_1 + (D + 1)y_2 = 0 \end{cases}$

۷) $\begin{cases} (2D + 1)y_1 + Dy_2 = x \\ (D - 1)y_1 + Dy_2 = 2 \end{cases}$

۸) $\begin{cases} (D^2 + D + 1)y_1 + (D^2 + 1)y_2 = e^x \\ (D^2 + D)y_1 + D^2 y_2 = e^{-x} \end{cases}$

جواب مجموعه مسائل فصل ۵

۱) از معادله اول دستگاه y_2 را پیدا کرده، سپس y_2 و مشتق آنرا در معادله دوم قرار می دهیم.

$$y_2 = y_1' - y_1, \quad y_2' = y_1'' - y_1'$$
$$y_1'' - y_1' = 4y_1 - 2(y_1' - y_1) \Rightarrow y_1'' + y_1' - 6y_1 = 0$$
$$t^2 + t - 6 = 0, \quad t = 2, -3 \Rightarrow y_1 = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$$
$$y_2 = 2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x} - c_1e^{2x} - c_2e^{-3x} = c_1e^{2x} - 4c_2e^{-3x}$$

۲) از معادله اول دستگاه y_2 را پیدا کرده، سپس y_2 و مشتق آنرا در معادله دوم قرار می دهیم.

$$y_2 = y_1' - y_1 - 2e^x, \quad y_2' = y_1'' - y_1' - 2e^x$$
$$y_1'' - y_1' - 2e^x = 4y_1 + y_1' - y_1 - 3e^x \Rightarrow y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = -e^x$$
$$t^2 - 2t - 3 = 0, \quad t = 3, -1 \Rightarrow y_1 = y_{1h} + y_{1p} = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{4}e^x$$
$$y_2 = 3c_1e^{3x} - c_2e^{-x} + \frac{1}{4}e^x - c_1e^{3x} - c_2e^{-x} - \frac{1}{4}e^x$$
$$y_2 = 2c_1e^{3x} - 2c_2e^{-x} - 2e^x$$

۳) مانند دو تمرین بالا، از معادله اول دستگاه y_2 را پیدا کرده، سپس y_2 و مشتق آنرا در معادله دوم قرار می دهیم.

$$y_2 = \frac{-1}{2}y_1' + 2y_1 + x, \quad y_2' = \frac{-1}{2}y_1'' + 2y_1' + 1$$
$$\frac{-1}{2}y_1'' + 2y_1' + 1 = 8y_1 - 4\left(\frac{-1}{2}y_1' + 2y_1 + x\right) + 1 \Rightarrow y_1'' = 8x$$
$$y_1' = 4x^2 + c_1, \quad y_1 = \frac{4}{3}x^3 + c_1x + c_2$$

$$y_2 = \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + (2c_1 + 1)x + 2c_2 - \frac{1}{2}c_1$$

۴) مانند تمرینات بالا، از معادله اول دستگاه y_2 را پیدا کرده، سپس y_2 و مشتق آنرا در معادله دوم قرار می دهیم.

$$y_2 = \frac{-1}{2}y_1' + \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}e^{-x}\sin x,$$
$$= \frac{-1}{2}y_1'' + \frac{3}{2}y_1' - \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x)$$
$$y_2' = \frac{-1}{2}y_1'' + \frac{3}{2}y_1' - \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x)$$
$$4y_1 - 4\left(\frac{-1}{2}y_1' + \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}e^{-x}\sin x\right) + 2e^{-x}\cos x$$
$$y_1'' - 2y_1' + 5y_1 = -5e^{-x}\cos x$$
$$t^2 - 2t + 5 = 0, \quad t = 1 \pm 2i \Rightarrow y_1 = y_{1h} + y_{1p}$$
$$= e^x(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + e^{-x}\frac{1}{13}(-7\cos x + 4\sin x)$$
$$y_2 = e^x((c_1 - c_2)\cos 2x + (c_1 + c_2)\sin 2x)$$
$$+e^{-x}\frac{1}{26}(-32\cos x + 9\sin x) - \frac{1}{2}e^{-x}\sin x$$

۵) از معادله اول دستگاه y_2 را پیدا کرده، سپس y_2 و مشتق آنرا در معادله دوم قرار می دهیم.

$$y_2 = \frac{-1}{5}y_1' + \frac{1}{5}y_1, \quad 5y_2' = -y_1'' + y_1'$$
$$y_1'' - y_1' = -10y_1 - 5y_1' + 5y_1 \Rightarrow y_1'' + 4y_1' + 5y_1 = 0$$
$$t^2 + 4t + 5 = 0, \quad t = -2 \pm i \Rightarrow y_1 = e^{-2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$$
$$y_2 = \frac{-1}{5}e^{-2x}((c_2 - 2c_1)\cos x - (c_1 + 2c_2)\sin x) +$$

$$\frac{1}{5}e^{-2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$$

$$5y_2 = e^{-2x}\left((3c_1 - c_2)\cos x + (c_1 + 3c_2)\sin x\right)$$

$$y_1(0) = 1,\quad y_2(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 1,\quad c_2 = 3$$

$$6)\ \begin{vmatrix} D^2 - 3D + 2 & D - 1 \\ D - 2 & D + 1 \end{vmatrix} = D^3 - 2D^2 - D + 2$$

$$(D^3 - 3D^2 + 2D)y_1 = 0,\quad t = 0, 1, 2 \Rightarrow$$

$$y_1 = c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{2x}$$

و بطور مشابه

$$y_2 = c_4 + c_5e^{x} + c_6e^{2x}$$

چون دترمینان ضرایب از درجه ۳ می باشد، لذا با جایگذاری y_1، y_2 در دستگاه، سه تا از پارامترها را بر حسب سه پارامتر دیگر محاسبه می کنیم.

$$c_4 = 2c_1,\quad c_5 = \frac{c_2}{2},\quad c_6 = 0$$

$$y_2 = 2c_1 + \frac{c_2}{2}e^{x}$$

$$7)\ \begin{vmatrix} 2D + 1 & D \\ D - 1 & D \end{vmatrix} = D^2 + 2D$$

$$\begin{vmatrix} x & D \\ 2 & D \end{vmatrix} = 1,\quad D(D+2)y_1 = 1$$

$$t = 0, -2 \Rightarrow y_{1h} = c_1 + c_2e^{-2},\quad y_{1p} = Ax = \frac{1}{2}x$$

$$y_1 = c_1 + c_2e^{-2x} + \frac{1}{2}x$$

$$\begin{vmatrix} 2D + 1 & x \\ D - 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + x,\quad D(D+2)y_2 = 1 + x$$

$$t = 0, -2 \Rightarrow y_{2h} = c_3 + c_4e^{-2},\quad y_{2p} = x(Ax + B) = x\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)$$

$$y_2 = c_3 + c_4e^{-2x} + x\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)$$

چون دترمینان ضرایب از درجه ۲ می باشد، لذا با جایگذاری y_1، y_2 در دستگاه، دو تا از پارامترها را بر حسب دو پارامتر دیگر محاسبه می کنیم.

$$c_4 = -\frac{3}{2}c_2,\quad c_1 = -5/4$$

$$y_2 = c_3 - \frac{3}{2}c_2e^{-2x} + x\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)$$

$$8)\ \begin{vmatrix} D^2 + D + 1 & D^2 + 1 \\ D^2 + D & D^2 \end{vmatrix} = -D$$

$$\begin{vmatrix} e^{x} & D^2 + 1 \\ e^{-x} & D^2 \end{vmatrix} = e^{x} - 2e^{-x},$$

$$Dy_1 = -e^{x} + 2e^{-x} \Rightarrow y_1 = -e^{x} - 2e^{-x} + c_1$$

معادله دوم را از معادله اول کم می کنیم، داریم. $y_1 + y_2 = e^{x} - e^{-x}$ با جایگذاری y_1 داریم.

$$y_2 = e^{x} - e^{-x} - y_1 = 2e^{x} + e^{-x} - c_1$$

مسائل تکمیلی

دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\quad \begin{cases} 2y_1' - y_1 + y_2' - 2y_2 = 0 \\ 3y_1' - 2y_1 + 2y_2' - 3y_2 = 0 \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} (D+5)y_1 + (D+1)y_2 = 6e^{-t} \\ (D+2)y_1 + (D+1)y_2 = 3 \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} (5D^2 - 8)y_1 - 3Dy_2 = 0 \\ (5D - 4)y_1 - (4D - 5)y_2 = 0 \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} (D-1)y_1 - y_2 = 0 \\ -2y_1 + (D-1)y_2 - y_3 = 0 \\ -2y_2 + (D-1)y_3 = 6e^{2t} \end{cases}$$

$$5)\quad \begin{cases} (3D^2 + 3D + 2)y_1 + (D^2 + 2D + 3)y_2 = 0 \\ (2D^2 - D - 2)y_1 + (D^2 + D + 1)y_2 = 8 \end{cases}$$

جواب مسائل تکمیلی

1) $y_1 = c_1e^t + c_2e^{-t}, \quad y_2 = c_1e^t - c_2e^{-t}$

2) $y_1 = c_1e^t + 9, \quad y_2 = -\frac{3}{2}c_1e^t + 3e^{-t} - 15$

3) $y_1 = c_1e^{-t} + c_2e^t + c_3e^{2t}, \quad y_2 = c_1e^{-t} - c_2e^t + 2c_3e^{2t}$

4) $y_1 = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{3t} - 2e^{2t}, \quad y_2 = -2c_2e^{-t} + 2c_3e^{3t} - 2e^{2t},$

$y_3 = -2c_1e^t + 2c_2e^{-t} + 2c_3e^{3t} + 2e^{2t}$

5) $y_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3\cos 2t + c_4\sin 2t - 3,$

$y_2 = -c_1e^{-t} - \frac{8}{3}c_2e^{-2t} - 2(c_3 + c_4)\cos 2t + 2(c_3 - c_4)\sin 2t + 2$

فصل ۶

تبدیل لاپلاس

مجموعه مسائل ۱.۶

تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

۱) $f(t) = ۵t^۴ - ۳t^۲ + ۶$

۲) $f(t) = ۴e^{۳t} + ۲\cos t - ۱$

۳) $f(t) = \cos(at + b)$

۴) $f(t) = \sinh(at + b)$

۵) $f(t) = ۳t - \cosh ۲t + \sin ۳t$

۶) $f(t) = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq t \leq ۱ \\ t & t \geq ۱ \end{cases}$

۷) $f(t) = \begin{cases} \sin ۳t & ۰ \leq t \leq \pi \\ t & t \geq \pi \end{cases}$

۸) $f(t) = ۲t^{۳/۲} + \sinh t - ۳$

در تمرینات زیر $f(t)$ را پیدا کنید.

۹) $F(s) = \frac{۲}{s^۴} + s^{-۵/۲}$

۱۰) $F(s) = \frac{s^۲ + s + ۱}{s(s^۲ + ۱)}$

۱۱) $F(s) = \frac{۲ - s}{۳s^{۳/۲}}$

۱۲) $F(s) = \frac{۱}{s^۳} + \frac{۴s}{s^۲ - ۱} + \frac{۳}{s^۲ + ۴}$

۱۳) $F(s) = \frac{۳s + ۱}{(s - ۱)(S^۲ + ۱)}$

حل مجموعه مسائل ۱.۶

۱) $F(s) = ۵\frac{۴!}{s^۵} - ۳\frac{۲!}{s^۳} + \frac{۶}{s}$

۲) $F(s) = \frac{۴}{s-۳} + \frac{۲s}{s^۲+۱} - \frac{۱}{s}$

۳) $f(t) = \cos at \cos b - \sin at \sin b$

$\Rightarrow F(s) = \cos b \mathcal{L}(\cos at) - \sin b \mathcal{L}(\sin at)$

$F(s) = \cos b \frac{s}{s^۲+a^۲} - \sin b \frac{a}{s^۲+a^۲}$

۴) $f(t) = \sinh at \cosh b + \cosh at\ sinhb$

$\Rightarrow F(s) = \cosh b \mathcal{L}(\sinh at) + \sinh b \mathcal{L}(\cosh at)$

$\Rightarrow F(s) = \frac{a}{s^۲-a^۲} \cosh b + \frac{s}{s^۲-a^۲} \sinh b$

۵) $F(s) = \frac{۳}{s^۲} - \frac{s}{s^۲-۴} + \frac{۳}{s^۲+۹}$

۶) $F(s) = \int_۰^۱ ۰\, dt + \int_۱^\infty te^{-st}\, dt = \left(\frac{۱}{s} + \frac{۱}{s^۲}\right) e^{-s}$

۷) $F(s) = \int_۰^\pi \sin ۳t e^{-st}\, dt + \int_\pi^\infty ۳e^{-st}\, dt$

$F(s) = \frac{۳}{s^۲+۹}(e^{-\pi s}+۱) + \frac{۳}{s}e^{-\pi s}$

۸) $F(s) = ۲\mathcal{L}\left(t^{۳/۲}\right) + \frac{۱}{s^۲-۱} - \frac{۳}{s} = ۲\frac{\Gamma(۵/۲)}{s^{۵/۲}} + \frac{۱}{s^۲-۱} - \frac{۳}{s}$

۹) $f(t) = \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۲}{s^۴}\right) + \mathcal{L}^{-۱}\left(s^{-۵/۲}\right) = \frac{۲}{۳!}t^۳ + \frac{۱}{\Gamma(۵/۲)}t^{۳/۲}$

۱۰) $F(s) = \frac{۱}{s} + \frac{۱}{s^۲+۱} \Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{s}\right) + \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{s^۲+۱}\right)$

$\Rightarrow f(t) = ۱ + \sin t$

۱۱) $F(s) = \frac{۲}{۳}s^{۳/۲} - \frac{۱}{۳}s^{-۱/۲} \Rightarrow f(t) = \frac{۲}{۳\Gamma(۳/۲)}t^{۱/۲} - \frac{۱}{۳\Gamma(۱/۲)}t^{-۱/۲}$

$\Rightarrow f(t) = \frac{۴}{۳\sqrt{\pi}} - \frac{۱}{۳\sqrt{\pi}}t^{-۱/۲}$

۱۲) $F(s) = \frac{۱}{۲}\frac{۲}{s^۳} + ۴\frac{s}{s^۲-۱} + \frac{۳}{۲}\frac{۲}{s^۲+۴}$

$\Rightarrow f(t) = \frac{۱}{۲}t^۲ + ۴\cosh t + \frac{۳}{۲}\sin ۲t$

۱۳) $F(s) = \frac{۲}{s-۱} - ۲\frac{s}{s^۲+۱} + \frac{۱}{s^۲+۱}$

$\Rightarrow f(t) = ۲e^t - ۲\cos t + \sin t$

مجموعه مسائل ۲.۶

با استفاده از قضیه ۷.۶ تبدیل لاپلاس توابع زیر رابدست آورید.

۱) $f(t) = t\sin 5t$ ۲) $f(t) = te^{2t}$

۳) $f(t) = t\sinh 4t$ ۴) $f(t) = t\cosh t$

۵) $f(t) = \frac{1}{16}(\sin 2t - 2t\cos 2t)$ ۶) $f(t) = \frac{1}{6}(\sin 3t + 3t\cos 3t)$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۷) $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

۸) $y'' + 9y = \sin 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

۹) $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0)3$

۱۰) $y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

با استفاده از قضیه ۶.۶ تبدیل لاپلاس توابع زیر رابدست آورید.

۱۱) $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 1 \\ 1 & 1 \le t \le 2 \\ 0 & t \ge 2 \end{cases}$ ۱۲) $f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & t \ge 1 \end{cases}$

۱۳) $f(t) = \begin{cases} 2 - t & 1 \le t \le 2 \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$ ۱۴) $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ t & 1 \le t \le 2 \\ 0 & t \ge 2 \end{cases}$

حل مجموعه مسائل ۲.۶

۱) $f'(t) = \sin 5t + 5t\cos 5t \Rightarrow f(0) = 0, \quad f'(0) = 0$

$f''(t) = 10\cos 5t - 25t\sin 5t = 10\cos 5t - 25f(t)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(f''(t)) = 10\frac{s}{s^2 + 25} - 25F(s) =$

$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = s^2 f(0)$

$\Rightarrow F(s) = \frac{10s}{(s^2 + 25)^2}$

۲) $f'(t) = e^{2t} + 2te^{2t}, \quad f(0) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}(f'(t)) = \frac{1}{s - 2} + 2F(s) = sF(s) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s - 2)^2}$

۳) $f'(t) = \sinh 4t + 4t\cosh 4t, \quad f''(t) = -16t\sinh 4t + 8\cosh 4t$

$-16\mathcal{L}(t\sinh 4t) + 8\mathcal{L}(\cosh 4t) = s^2\mathcal{L}f(t) - sf(0) - f'(0)$

$\Rightarrow (s^2 - 16)F(s) = \frac{8s}{s^2 - 16} \Rightarrow F(s) = \frac{8s}{(s^2 - 16)^2}$

۴) $f'(t) = \cosh t + t\sinh t, \quad f''(t) = t\cosh t + 2\sinh t$

$\mathcal{L}(t\cosh t) + 2\mathcal{L}(\sinh t) = s^2\mathcal{L}f(t) - sf(0) - f'(0)$

$\Rightarrow (s^2 - 1)F(s) = \frac{2}{s^2 - 1} + 1 \Rightarrow F(s) = \frac{s^2 + 1}{(s^2 - 1)^2}$

۵) ابتدا $\mathcal{L}(t\cos 2t)$ را پیدا می کنیم.

$h(t) = t\cos 2t, \quad h'(t) = \cos 2t - 2t\sin 2t, \quad h''(t) = -4\sin 2t - 4t\cos$

$\mathcal{L}h''(t) = s^2\mathcal{L}h(t) - sh(0) - h'(0) = \frac{-8}{s^2 + 4} - 4\mathcal{L}h(t)$

$\Rightarrow \mathcal{L}h(t) = \frac{s^2 - 4}{(s^2 + 4)^2}$

$F(s) = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{s^2 + 4} - 2\frac{s^2 - 4}{(s^2 + 4)^2}\right)$

۶) با توجه به مسئله بالا،

$$\mathcal{L}(t\cos ۳t)=\frac{s^۲-۹}{(s^۲+۹)^۲}$$

$$F(s)=\frac{۱}{۶}\left(\frac{۳}{s^۲+۹}+\frac{s^۲-۹}{(s^۲+۹)^۲}\right)=\frac{s^۲}{(s^۲+۹)^۲}$$

۷) $\mathcal{L}y''+۴\mathcal{L}y=۰,\quad s^۲Y-sy(۰)-y'(۰)+۴Y=۰$

$$Y=\frac{s}{s^۲+۴}+\frac{۱}{s^۲+۴}\Rightarrow y(t)=\cos t+\frac{۱}{۲}\sin ۲t$$

۸) $\mathcal{L}y''+۹\mathcal{L}y=\mathcal{L}(\sin ۲t),\quad s^۲Y-sy(۰)-y'(۰)+۹Y=\frac{۲}{s^۲+۴}$

$$Y=\frac{s}{s^۲+۹}+\frac{s^۲+۶}{(s^۲+۹)(s^۲+۴)}=\frac{s}{s^۲+۹}+\frac{۳/۵}{s^۲+۹}+\frac{۲/۵}{s^۲+۴}$$

$$\Rightarrow y(t)=\cos ۳t+\frac{۱}{۵}\sin ۳t+\frac{۱}{۵}\sin ۲t$$

۹) $\mathcal{L}y''+\mathcal{L}y'-۲\mathcal{L}y=۰,$

$$s^۲Y-sy(۰)-y'(۰)+sY-y(۰)-۲Y=۰$$

$$Y=\frac{۳}{s^۲+s-۲}=\frac{۱}{s-۱}-\frac{۱}{s+۲}$$

$$\Rightarrow y(t)=e^t-e^{-۲t}$$

۱۰) $\mathcal{L}y''-\mathcal{L}y'-۶\mathcal{L}y=۰,$

$$s^۲Y-sy(۰)-y'(۰)+sY-y(۰)-۶Y=۰$$

$$Y=\frac{s+۱}{s^۲-s-۶}=\frac{۴}{۵}\frac{۱}{s-۳}-\frac{۱}{۵}\frac{۱}{s+۲}$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{۴}{۵}e^{۳t}+\frac{۱}{۵}e^{-۲t}$$

۱۱) $f'(t)=\begin{cases}۰ & ۰<t<۱\\ ۰ & ۱<t<۲\\ ۰ & t>۲\end{cases}$

$$\mathcal{L}f'(t)=s\mathcal{L}f(t)-f(۰)-e^{-s}(f(۱^+)-f(۱^-)-e^{-۲s}(f(۲^+)-f(۲^-)))$$

$$sF(s)=e^{-s}-e^{-۲s},\quad F(s)=\frac{۱}{s}(e^{-s}-e^{-۲s})$$

۱۲) $f'(t)=\begin{cases}t & ۰<t<۱\\ ۰ & t>۱\end{cases}$

$$\mathcal{L}f'(t)=s\mathcal{L}f(t)-f(۰)-e^{-s}(f(۱^+)-f(۱^-))$$

$$\mathcal{L}f'(t)=\int_۰^۱ e^{-st}\,dt+\int_۱^\infty ۰\,dt=-\frac{۱}{s}e^{-s}+\frac{۱}{s}$$

$$sF(s)=-\frac{۱}{s}e^{-s}+\frac{۱}{s}-e^{-s}$$

$$F(s)=-\frac{۱}{s^۲}e^{-s}+\frac{۱}{s^۲}-\frac{۱}{s}e^{-s}$$

۱۳) $f'(t)=\begin{cases}-۱ & ۱<t<۲\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$

$$\mathcal{L}f'(t)=s\mathcal{L}f(t)-f(۰)-e^{-s}(f(۱^+)-f(۱^-)-e^{-۲s}(f(۲^+)-f(۲^-)))$$

$$\mathcal{L}f'(t)=\int_۱^۲ -e^{-st}\,dt+\int_۰^۱ ۰\,dt+\int_۲^\infty ۰\,dt=\frac{۱}{s}(e^{-۲s}-e^{-s})$$

$$sF(s)=\frac{۱}{s}(e^{-۲s}-e^{-s})+e^{-s}$$

$$F(s)=\frac{۱}{s^۲}e^{-۲s}-\frac{۱}{s^۲}e^{-s}+\frac{۱}{s}e^{-s}$$

۱۴) $f'(t)=\begin{cases}۰ & ۰<t<۱\\ ۱ & ۱<t<۲\\ ۰ & t>۲\end{cases}$

$$\mathcal{L}f'(t)=s\mathcal{L}f(t)-f(۰)-e^{-s}(f(۱^+)-f(۱^-)-e^{-۲s}(f(۲^+)-f(۲^-)))$$

$$\mathcal{L}f'(t)=\int_۱^۲ e^{-st}\,dt+\int_۰^۱ ۰\,dt+\int_۲^\infty ۰\,dt=-\frac{۱}{s}(e^{-۲s}-e^{-s})$$

$$sF(s)=-\frac{۱}{s}(e^{-۲s}-e^{-s})-۲e^{-۲s}+۱$$

$$F(s)=-\frac{۱}{s^۲}e^{-۲s}+\frac{۱}{s^۲}e^{-s}-\frac{۲}{s}e^{-۲s}+\frac{۱}{s}$$

مجموعه مسائل ۳.۶

با استفاده از قضیه ۸.۶ تبدیل لاپلاس توابع زیر رابدست آورید.

۱) $\int_0^t (r^3 - 4\cos r)\, dr$ ۲) $\int_0^t (r^{1/2} - 2\sinh r)\, dr$

۳) $\int_0^t (2\sinh 3r + 4e^{-r} - \cosh 2r)\, dr$

با استفاده ازفرمول (۲) تبدیل معکوس توابع زیر رابدست آورید.

۴) $\frac{1}{s^2(s^2+4)}$ ۵) $\frac{1}{s^2}\left(\frac{s+3}{s^2+9}\right)$

۶) $\frac{3s-4}{s^2(s^2-9)}$ ۷) $\frac{1}{s^3(s-5)}$

معادلات دیفرانسیل زیر راحل کنید.

۸) $y'' + y = 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

۹) $y'' + y' = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

۱۰) $y'' + 9y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

۱۱) $y'' - y' - 2y = 3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

۱۲) $y'' + y' - 12y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

حل مجموعه مسائل ۳.۶

۱) $\frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(t^3 - 4\cos t)$

$$\frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{3!}{s^4} - \frac{4s}{s^2+1}\right)$$

۲) $\frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(t^{1/2} - 2\sinh t)$

$$\frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{s^{3/2}} - \frac{2}{s^2-1}\right)$$

۳) $\frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(-2\sin 3t + 4e^{-t} - \cosh 2t)$

$$\frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{6}{s^2+9} + \frac{4}{s+1} - \frac{s}{s^2-4}\right)$$

۴) $F(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}(s^2+4)\right) = \frac{1}{s}F_1(s)$

$$F_1(s) = \frac{1}{s} = \frac{1}{s}F_2(s)$$

$$F_2 = \frac{1}{s^2+4} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}F_2(s) = \frac{1}{2}\sin 2t$$

$$\mathcal{L}^{-1}F_1(s) = \int_0^t \frac{1}{2}\sin 2r\, dr = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}F(s) = \int_0^t \frac{1}{4}(1 - \cos 2r)\, dr = \frac{1}{4}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)$$

۵) $F(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\left(\frac{s}{s^2+9} + \frac{3}{s^2+9}\right)\right) = \frac{1}{s}F_1(s)$

$$F_1(s) = \frac{1}{s}F_2(s)$$

$$F_2 = \frac{s}{s^2+9} + \frac{3}{s^2+9} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}F_2(s) = \cos 3t + \sin 3t$$

$$\mathcal{L}^{-1}F_1(s) = \int_0^t (\cos 3r + \sin 3r\, dr = \frac{1}{3}(\sin 3t - \cos 3t + 1)$$

$\mathcal{L}^{-۱}F(s) = \int_۰^t \frac{۱}{۳}(\sin ۳r - \cos ۳r + ۱)\, dr =$

$\frac{۱}{۹}(-\cos ۳t + ۱ - \sin ۳t + ۳t)$

۶) $F(s) = \frac{۱}{s}\left(\frac{۳s-۴}{s(s^۲-۹)}\right) = \frac{۱}{s}F_۱(s)$

$F_۱(s) = \frac{۳}{s^۲-۹} - \frac{۴}{s(s^۲-۹)} \Rightarrow \mathcal{L}^{-۱}F_۱(s) =$

$\sinh ۳t - \frac{۴}{۳}\int_۰^t \sinh ۳r\, dr = \sinh ۳t - \frac{۴}{۹}(\cosh ۳t - ۱)$

$\mathcal{L}^{-۱}F(s) = \int_۰^t \left(\sinh ۳r - \frac{۴}{۹}(\cosh ۳r - ۱)\right) dr =$

$\frac{۱}{۳}\cosh ۳t - \frac{۴}{۲۷}\sinh ۳t + \frac{۴}{۹}t - \frac{۱}{۳}$

۷) $F(s) = \frac{۱}{s}\left(\frac{۱}{s^۲(s-۵)}\right) = \frac{۱}{s}F_۱(s)$

$F_۱(s) = \frac{۱}{s}\frac{۱}{s(s-۵)} = \frac{۱}{s}F_۲(s)$

$F_۲(s) = \frac{۱}{s(s-۵)} = \frac{۱}{s}F_۳(s)$

$\mathcal{L}^{-۱}F_۳(s) = e^{۵t}$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-۱}F_۲(s) = \int_۰^t e^{۵r}\, dr = \frac{۱}{۵}(e^{۵t} - ۱)$

$\mathcal{L}^{-۱}F_۱(s) = \int_۰^t \frac{۱}{۵}(e^{۵r} - ۱)\, dr = \frac{۱}{۲۵}(e^{۵t} - ۱) - \frac{۱}{۵}t$

$\mathcal{L}^{-۱}F(s) = \int_۰^t \left(\frac{۱}{۲۵}(e^{۵r} - ۱) - \frac{۱}{۵}r\right) dr =$

$\frac{۱}{۱۲۵}(e^{۵t} - ۱) - \frac{۱}{۲۵}t - \frac{۱}{۱۰}t^۲$

۸) $s^۲Y - sY(۰) - y'(۰) + Y = \frac{۲}{s} \Rightarrow$

$Y = \frac{۱}{s^۲+۱} + \frac{۲}{s(s^۲+۱)}$

$y(t) = \sin t + ۲\int_۰^t \sin r\, dr = \sin t - ۲\cos t + ۲$

۹) $s^۲Y - sY(۰) - y'(۰) + sY + y(۰) = \frac{۱}{s}$

$\Rightarrow Y = \frac{۱}{s}\left(\frac{۱}{s} + \frac{۱}{s+۱}\right)$

$y(t) = \int_۰^t (۱ + e^{-r})\, dr = t - e^{-t} + ۱$

۱۰) $s^۲Y - sY(۰) - y'(۰) + ۹Y = \frac{۱}{s^۲} \Rightarrow$

$Y = \frac{۱}{s}\left(\frac{۱}{s(s^۲+۹)}\right)$

$y(t) = \int_۰^t \left(\int_۰^t \frac{۱}{۳}\sin ۳r\, dr\right) dt = \int_۰^t \frac{۱}{۹}(۱ - \cos ۳t)\, dt$

$y(t) = \frac{t}{۹} - \frac{۱}{۲۷}\sin ۳t$

۱۱) $s^۲Y - sY(۰) - y'(۰) - sY + Y(۰) - ۲Y = \frac{۳}{s}$

$\Rightarrow Y = \frac{۱}{s}\left(\frac{۱}{s-۲} - \frac{۱}{s+۱}\right)$

$y(t) = \int_۰^t (e^{۲r} - e^{-r})\, dr = \frac{۱}{۲}(e^{۲t} - ۱) + (e^{-t} - ۱)$

۱۲) $s^۲Y - sY(۰) - y'(۰) + sY - Y(۰) - ۱۲Y = \frac{۱}{s^۲}$

$\Rightarrow Y = \frac{۱}{s}\left(\frac{۱}{s}\frac{۱}{(s-۳)(s+۴)}\right)$

$y(t) = \int_۰^t \left(\int_۰^t \frac{۱}{۷}(-e^{-۴r} + e^{۳r})\right) dr =$

$$\int_۰^t \left(\frac{۱}{۲۸}(e^{-۴t}-۱)+\frac{۱}{۲۱}(e^{۳t}-۱)\right)\, dt =$$

$$\frac{۱}{۲۸}(-t-\frac{۱}{۴}(e^{-۴t}-۱))+\frac{۱}{۲۱}(t+\frac{۱}{۳}(e^{۳t}-۱)) =$$

$$\frac{۱}{۶۳}e^{۳t}-\frac{۱}{۱۱۲}e^{-۴t}-\frac{t}{۱۲}-\frac{۱}{۱۱۴}$$

مجموعه مسائل ۴.۶

تبدیل لاپلاس توابع زیر رابدست آورید.

۱) $f(t)=e^{-t}(۲\sqrt{t}-۵\sin t-۲)$

۲) $f(t)=e^{۳t}\sinh ۴t$

۳) $f(t)=\sinh ۲t\cos t$

تبدیل معکوس توابع زیر رابدست آورید.

۴) $\dfrac{۱}{(s+۴)^۳}-\dfrac{۲}{(s-۱)^۴}$

۵) $\dfrac{s}{s^۲-۲s+۲}$

۶) $\dfrac{s-۱}{s(s^۲+۲s+۱)}$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۷) $y''+۲y'+۱۷y=۰,\quad y(۰)=۰,\quad y'(۰)=۱۲$

۸) $۴y''-۴y'+۳۷y=۰,\quad y(۰)=۳,\quad y'(۰)=\dfrac{۳}{۲}$

۹) $y''+y'+۱٫۲۵y=۰,\quad y(۰)=۱,\quad y'(۰)=-\dfrac{۱}{۲}$

۱۰) $y''+۴y'+۴y=۸e^{-۲t},\quad y(۰)=۱,\quad y'(۰)=۱$

توابع زیر را بر حسب توابع پله‌ای واحد بیان نموده و تبدیل لاپلاس هریک را بنویسید.

۱۱و ۱۲و ۱۳) شکلها در کتاب است.

تبدیل لاپلاس توابع زیر رابدست آورید.

۱۴) $(t-\pi)u_\pi(t)$ ۱۵) $t^۳u_۲(t)$

۱۶) $u_\pi(t)\sin t$ ۱۷) $e^{-3t}u_1(t)$

۱۸) $f(t)=\begin{cases} t^3 & 0<t<1 \\ 0 & t\geq 1\end{cases}$

۱۹) $f(t)=\begin{cases} 4\cos 2t & 0<t<\frac{\pi}{2} \\ 0 & t\geq \frac{\pi}{2}\end{cases}$

۲۰) $f(t)=\begin{cases} 2-e^{3t} & 0<t<\pi \\ 0 & t\geq \pi\end{cases}$

تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

۲۱) $\frac{e^{-s}}{s^4}$ ۲۲) $\frac{e^{-2s}}{s^2+4}$ ۲۳) $\frac{1-e^{-s}}{s(s+2)}$

۲۴) $\frac{e^{-\pi s}}{s^2+4s+20}$ ۲۵) $\frac{se^{3s}}{s^2-9}$

حل مجموعه مسائل ۴.۶

۱) $f_1(t)=2\sqrt{t}-5\sin t-2 \Rightarrow F_1(s)=\frac{\sqrt{\pi}}{s^{3/2}}-\frac{5}{s^2+1}-\frac{2}{s}$

$$F(s)=\frac{\sqrt{\pi}}{(s+1)^{3/2}}-\frac{5}{(s+1)^2+1}-\frac{2}{s+1}$$

۲) $f_1(t)=\sinh 4t \Rightarrow F_1(s)=\frac{4}{s^2-16}$

$$F(s)=\frac{4}{(s-3)^2-16}=\frac{4}{s^2-6x-7}$$

۳) $f(t)=\frac{1}{2}(e^{2t}-e^{-2t})\cos t=\frac{1}{2}e^{2t}\cos t-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t$

$$F(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+1}-\frac{s-2}{(s+2)^2+1}\right)$$

۴) $f(t)=e^{-4t}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^3}-e^t\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^4}$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{1}{2}t^2e^{-4t}-\frac{1}{3}t^3e^t$$

۵) $\mathcal{L}^{-1}F(s)=f(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{s-1+1}{(s-1)^2+1}$

$$f(t)=e^t\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}\right)=e^t(\cos t+\sin t)$$

۶) $F(s)=\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{s(s+1)^2}$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s+1)^2}=e^{-t}t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s(s+1)^2}=\int_0^t e^{-r}r\,dr=1-e^{-t}(t+1)$$

$$\Rightarrow f(t)=2te^{-t}+e^{-t}-1$$

۷) $s^2Y-sy(0)-y'(0)+2sY-2y(0)+17Y=0$

$$\Rightarrow S^2Y-12+2sY+17Y=0$$

$Y = \frac{۱۲}{s^۲ + ۲s + ۱۷} = \frac{۱۲}{(s+۱)^۲ + ۱۶} \Rightarrow$

$y(t) = ۳e^{-۱}\sin ۴t$

۸) $۴s^۲Y - ۴sy(۰) - ۴y'(۰) - ۴sY + ۸y(۰) + ۳۷Y = ۰$

$\Rightarrow ۴s^۲Y - ۱۲s + ۶ - ۴sY + ۳۷Y = ۰$

$Y = \frac{۱۲s - ۶}{۴s^۲ - ۴s + ۳۷} = \frac{۳(s - ۱/۲)}{(s - ۱/۲)^۲ + ۹}$

$\Rightarrow y(t) = ۳e^{t/۲}\cos ۳t$

۹) $s^۲Y - sY(۰) - y'(۰) + sY - y(۰) + ۱/۲۵Y = ۰$

$\Rightarrow s^۲Y - s + sY + ۱/۲۵Y - ۰/۵ = ۰$

$Y = \frac{s + ۰/۵}{s^۲ + s + ۱/۲۵} = \frac{s + ۰/۵}{(s + ۰/۵)^۲ + ۱} \Rightarrow$

$y(t) = e^{-t/۲}\cos t$

۱۰) $s^۲Y - sy(۰) - y'(۰) + ۴sY - ۴y(۰) + ۴Y = \frac{۸}{s + ۲}$

$\Rightarrow s^۲Y - s + ۴sY + ۴Y - ۵ = \frac{۸}{s + ۲}$

$Y = \frac{s^۲ + ۷s + ۱۸}{(s + ۲)(S^۲ + ۴s + ۴)} = \frac{۸}{(s + ۲)^۳} + \frac{۳}{(s + ۲)^۲} + \frac{۱}{s + ۲}$

$\Rightarrow y(t) = e^{-۲t}(۴t^۲ + ۳t + ۱)$

۱۱) $f(t) = ۲(u_۰(t) - u_\pi(t)) \Rightarrow F(s) = ۲\left(\frac{۱}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s}\right)$

۱۲) $f(t) = u_۱(t) - ۲u_۲(t) + u_۳(t) \Rightarrow$

$F(s) = \frac{e^{-s}}{s} - ۲\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-۳s}}{s}$

۱۳) $f(t) = u_۰(t) - u_۱(t) + u_۲(t) - u_۳(t) + u_۴(t) - u_۵(t)$

$\Rightarrow F(s) = \frac{۱}{s}(۱ - e^{-s} + e^{-۲s} - e^{-۳s} + e^{-۴s} - e^{-۵s}$

۱۴) $F(s) = e^{-\pi s}\mathcal{L}(t - \pi + \pi) = \frac{۱}{s^۲}e^{-\pi s}$

۱۵) $F(s) = e^{-۲s}\mathcal{L}(t + ۲)^۳ = e^{-۲s}\left(\frac{۶}{s^۴} + \frac{۸}{s} + \frac{۱۲}{s^۳} + \frac{۱۲}{s^۲}\right)$

۱۶) $F(s) = e^{-\pi s}\mathcal{L}\sin(t + \pi) = -e^{-\pi s}\frac{۱}{s^۲ + ۱}$

۱۷) $F(s) = e^{-s}\mathcal{L}e^{-۳(t+۱)} = e^{-(s+۳)}\frac{۱}{s + ۳}$

۱۸) $f(t) = t^۳(u_۰(t) - u_۱(t))$

$F(s) = \frac{۶}{s^۴} - e^{-s}\mathcal{L}(t + ۱)^۳ = \frac{۶}{s^۴} - e^{-s}\left(\frac{۶}{s^۴} + \frac{۱}{s} + \frac{۶}{s^۳} + \frac{۳}{s^۲}\right)$

۱۹) $f(t) = ۴\cos ۴t\left(u_۰(t) - u_{\pi/۲}(t)\right)$

$F(s) = \frac{۴s}{s^۲ + ۴} - ۴e^{-\frac{\pi}{۲}s}\mathcal{L}\cos ۲(t + \pi/۲) =$

$= \frac{۴s}{s^۲ + ۴} - ۴e^{\frac{\pi}{۲}s}\mathcal{L}\cos ۲t \Rightarrow F(s) = \frac{۴s}{s^۲ + ۴}(۱ + e^{-\frac{\pi}{۲}s})$

۲۰) $f(t) = ۲ - e^{۳t}(u_۰(t) - u_\pi(t))$

$F(s) = \frac{۲}{s} - \frac{۱}{s - ۳}e^{-s}\mathcal{L}(۲ - e^{۳(t+۱)}) =$

$\frac{۲}{s} - \frac{۱}{s - ۳} - e^{-s}\left(\frac{۲}{s} - e^{۳\pi}\frac{۱}{s - ۳}\right)$

۲۱) $\mathcal{L}^{-۱}\frac{۱}{s^۴} = \frac{۱}{۶}t^۳$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-۱}F(s) = \frac{۱}{۶}(t - ۱)^۳u_۱(t)$

۲۲) $\mathcal{L}^{-۱}\frac{۱}{s^۲ + ۴} = \frac{۱}{۲}\sin ۲t$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-۱}F(s) = \frac{۱}{۲}u_۲(t)\sin ۲(t + ۲)$

۲۳) $\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s(s+2)} = \int_0^t e^{-2r}\,dr = \frac{1}{2}(1-e^{-2t})$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}F(s) = \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) - \frac{1}{2}(1-e^{-2(t-1)})u_1(t)$

۲۴) $\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s+2)^2+16} = e^{2t}\frac{\sin 4t}{4}$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}F(s) = \frac{1}{4}e^{-2(t-\pi)}u_\pi(t)\sin 4t$

۲۵) $\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2-9} = \cosh 3t$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}F(s) = u_{-3}(t)\cosh 3(t+3)$

۵.۶ مجموعه مسائل

تبدیل لاپلاس توابع زیر رابدست آورید.

۱) $t^2\cosh 2t$ ۲) $t(5\sin 4t - 2t\cos t)$

۳) $t(2\cosh 4t + 3t\sinh 2t)$ ۴) $t^n e^{at}$

۵) $te^{2t}\sin 3t$ ۶) $t^2e^{-t}\int_0^t e^{2t}\sin 5t\,dt$

تبدیل معکوس توابع زیر رابدست آورید.

۷) $F(s) = \ln\frac{s^2+1}{s(s+1)}$ ۸) $F(s) = \ln\frac{s^2+4}{s^2}$

۹) $F(s) = \cot^{-1}(s+4)$ ۱۰) $F(s) = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$

مقدار انتگرالهای زیر را بدست آورید.

۱۱) $\int_0^\infty t^2\cos t\,dt$ ۱۲) $\int_0^\infty t\sinh 2t\,dt$

۱۳) $\int_0^\infty te^{2t}\cos 2t\,dt$

حل مجموعه مسائل ۵.۶

۱) $f_۱(t)=\cosh ۲t,\quad \mathcal{L}f_۱(t)=\frac{s}{s^۲-۴}$

$$F(s)=\mathcal{L}(t^۲ f_۱(t))=F_۱''(s)=\left(\frac{s}{s^۲-۴}\right)''=\frac{۲s(s^۲+۱۲)}{(s^۲-۴)^۳}$$

۲) $f_۱(t)=۵\sin ۴t-۲t\cos t,\quad \mathcal{L}f_۱(t)=\frac{۲۰}{s^۲+۱۶}-۲\left(\frac{s}{s^۲+۱}\right)'$

$$F_۱(s)=\frac{۲۰}{s^۲+۱۶}+۲\frac{s^۲-۱}{(s^۲+۱)^۲}$$

$$F(s)=-F_۱'(s)=\frac{۴۰s}{(s^۲+۱۶)^۲}+\frac{۴s(۳-s^۲)}{(s^۲+۱)^۳}$$

۳) $f_۱(t)=۲\cosh ۴t+۳t\sinh ۲t,$

$$\mathcal{L}f_۱(t)=\frac{۲s}{s^۲-۱۶}-۳\left(\frac{۲}{s^۲-۴}\right)'$$

$$F_۱(s)=\frac{۲s}{s^۲-۱۶}+۱۲\frac{s}{(s^۲-۴)^۲}$$

$$F(s)=-F_۱'(s)=۲\frac{s^۲+۱۶}{(s^۲-۱۶)^۲}+۱۲\frac{۳s^۲+۴}{(s^۲-۴)^۳}$$

۴) $f_۱(t)=e^{at},\quad \mathcal{L}f_۱(t)=\frac{۱}{s-a}$

$$F(s)=-F_۱^{(n)}(s)=\left(\frac{۱}{s-a}\right)^{(n)}=\frac{n!}{(s-a)^{n+۱}}$$

۵) $f_۱(t)=e^{۴t}\sin ۳t,\quad \mathcal{L}f_۱(t)=\frac{۳}{(s-۴)^۲+۹}$

$$F(s)=-F_۱'(s)=۶\frac{s-۴}{((s-۴)^۲+۹)^۲}=۶\frac{s-۴}{(s^۲-۸s+۲۵)^۲}$$

۶) $f_۱(t)=e^{-t}\int_۰^t e^{۲t}\sin ۵t\,dt,\quad F(s)=F_۱''(s)$

$$f_۲(t)=\int_۰^t e^{۲t}\sin ۵t\,dt,\quad F_۱(s)=F_۲(s+۱)$$

$$f_۳(t)=e^{۲t}\sin ۵t,\quad F_۲(s)=\frac{۱}{s}F_۳(s)$$

$$F_۳(s)=\frac{۵}{(s-۲)^۲+۲۵}$$

$$F_۲(s)=\frac{۱}{s}\frac{۵}{(s-۲)^۲+۲۵}$$

$$F_۱(s)=\frac{۱}{s+۱}\frac{۵}{(s-۱)^۲+۲۵}$$

$$F(s)=\left(\frac{۱}{s+۱}\frac{۵}{s^۲-۲s+۲۶}\right)''$$

۷) $F(s)=\ln(s^۲+۱)-\ln s-\ln(s+۱)$

$$F'(s)=\frac{۲s}{s^۲+۱}-\frac{۱}{s}-\frac{۱}{s+۱}$$

$$f(t)=-\frac{۱}{t}\mathcal{L}^{-۱}F'(s)=\frac{۱}{t}(۱+e^{-t}-۲\cos ۲t)$$

۸) $F(s)=\ln(s^۲+۴)-۲\ln s$

$$F'(s)=\frac{۲s}{s^۲+۴}-\frac{۲}{s}$$

$$f(t)=-\frac{۱}{t}\mathcal{L}^{-۱}F'(s)=\frac{۲}{t}(۱-\cos ۲t)$$

۹) $F'(s)=\frac{-۱}{۱+(s+۴)^۲}$

$$f(t)=-\frac{۱}{t}\mathcal{L}^{-۱}F'(s)=\frac{۱}{t}e^{-۴t}\sin t$$

۱۰) $F_۱(s)=\tan^{-۱}\frac{۱}{s},\quad f_۱(t)=\frac{-۱}{t}\mathcal{L}^{-۱}F_۱'(s)=$

$$\frac{۱}{t}\mathcal{L}^{-۱}\frac{۱}{s^۲+۱}=\frac{\sin t}{t}$$

$$F(s)=\frac{۱}{s}F_۱(s),\quad f(t)=\int_۰^t\frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$۱۱)\ \mathcal{L}(t^{۲}\cos t) = \left(\frac{s}{s^{۲}+۱}\right)'' = \frac{۲s(s^{۲}-۳)}{(s^{۲}+۱)^{۳}}$$

$$\int_{۰}^{\infty} t^{۲}\cos t\,dt = \int_{۰}^{\infty} e^{-st}t^{۲}\cos t\,dt\,|_{s=۰} = \frac{۲s(s^{۲}-۳)}{(s^{۲}+۱)^{۳}}\,|_{s=۰} = ۰$$

$$۱۲)\ \mathcal{L}(t\sinh ۲t) = -\left(\frac{۲}{s^{۲}-۴}\right)' = \frac{۴s}{(s^{۲}-۴)^{۲}}$$

$$\int_{۰}^{\infty} t\sinh ۲t\,dt = \int_{۰}^{\infty} e^{-st}t\sinh ۲t\,dt\,|_{s=۰} =$$

$$\frac{۴s}{(s^{۲}-۴)^{۲}}\,|_{s=۰} = ۰$$

$$۱۳)\ \mathcal{L}(t\cos ۲t) = -\left(\frac{s}{S^{۲}+۴}\right)' = \frac{۴-s^{۲}}{(s^{۲}-۴)^{۲}}$$

$$\int_{۰}^{\infty} te^{۲t}\cos ۲t\,dt = \int_{۰}^{\infty} e^{-st}t\cos ۲t\,dt\,|_{s=۲} =$$

$$\frac{۴-s^{۲}}{(s^{۲}-۴)^{۲}}\,|_{s=۲} = \frac{۳}{۱۰۰}$$

مجموعه مسائل ۶.۶

تبدیل لاپلاس توابع زیر رابدست آورید.

$۱)\ \frac{e^{t}-\cos t}{t}$ $\quad ۲)\ \frac{۲}{t}(۱-\cosh ۳t)$

$۳)\ \frac{۱}{t}(e^{-۲t}-e^{-۳t})$

نشان دهید که،

$$۴)\ \int_{۰}^{\infty}\frac{\sin at}{t}\,dt = \frac{\pi}{۲},\quad a>۰$$

$$۵)\ \int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-at}\sin t}{t}\,dt = \cot^{-۱}a,\quad a>۰$$

$$۶)\ \int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \ln\frac{b}{a}$$

تبدیل معکوس توابع زیر رابدست آورید.

$۷)\ \frac{s}{(s^{۲}+۱)^{۲}}$ $\quad ۸)\ \frac{s+۲}{(s^{۲}+۴s+۵)^{۲}}$

$۹)\ \frac{s}{(s^{۲}-۴)^{۲}}$

تبدیل لاپلاس توابع زیر رابدست آورید.

$۱۰)\ e^{۲t}\int_{۰}^{t}e^{-t}\frac{\sin ۲t}{t}\,dt$ $\quad ۱۱)\ \frac{۱-\cos t}{t^{۲}}$

$۱۲)\ t\int_{۰}^{t}e^{۳t}\frac{\sinh t}{t}\,dt$ $\quad ۱۳)\ t\int_{۰}^{t}e^{-۳t}\frac{۱-\cos t}{t}\,dt$

حل مجموعه مسائل ۶.۶

۱) $\mathcal{L}(e^t - \cos t) = \frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1}$

$$\mathcal{L}\left(\frac{e^t - \cos t}{t}\right) = \int_s^\infty \left(\frac{1}{u-1} - \frac{u}{u^2+1}\right) du =$$

$$\ln(u-1) - \frac{1}{2}\ln(u^2+1) = \ln \frac{u-1}{\sqrt{u^2+1}}\Big|_s^\infty = \ln \frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1}$$

۲) $\mathcal{L}(1 - \cosh 3t) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2-9}$

$$2\mathcal{L}\left(\frac{1-\cosh 3t}{t}\right) = 2\int_s^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2-9}\right) du =$$

$$2\ln(u) - \ln(u^2-9) = \ln \frac{u^2}{u^2-9}\Big|_s^\infty = \ln \frac{s^2-9}{s^2}$$

۳) $\mathcal{L}(e^{-2t} - e^{-4t}) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4}$

$$\mathcal{L}\frac{1}{t}(e^{-2t} - e^{-4t}) = \int_s^\infty \left(\frac{1}{u+2} - \frac{1}{u+4}\right) du =$$

$$\ln(u+2) - \ln(u+4) = \ln \frac{u+2}{u+4}\Big|_s^\infty = \ln \frac{s+4}{s+2}$$

۴) $\int_0^\infty \frac{\sin at}{t}\, dt = \int_0^\infty \frac{a}{s^2+a^2}\, ds =$

$$\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{s}{a}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

۵) $\int_0^\infty \frac{e^{-at}\sin t}{t}\, dt = \cot^{-1} a$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(s+a)^2+1}\, ds =$$

$$\tan^{-1}(s+a)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} a = \cot^{-1} a$$

۶) $\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt = \int_0^\infty \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right) ds =$

$$\ln \frac{s+a}{s+b}\Big|_0^\infty = \ln \frac{b}{a}$$

۷) $f(t) = t\mathcal{L}^{-1}\int_s^\infty \frac{u}{(u^2+1)^2}\, du = \frac{t}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{u^2+1}\right)_s^\infty =$

$$\frac{t}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+1} = \frac{t}{2}\sin t$$

۸) $f(t) = t\mathcal{L}^{-1}\int_s^\infty \frac{u+2}{(u^2+4u+5)^2}\, du =$

$$\frac{t}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{u^2+4u+5}\right)_s^\infty =$$

$$\frac{t}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s+2)^2+1} = \frac{t}{2}e^{-2t}\sin t$$

۹) $f(t) = t\mathcal{L}^{-1}\int_s^\infty \frac{u}{(u^2-4)^2}\, du = \frac{t}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{u^2-4}\right)_s^\infty =$

$$\frac{t}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2-4} = \frac{t}{4}\sinh 2t$$

۱۰) $F(s) = \mathcal{L}\left(e^{2t}\int_0^t e^{-t}\frac{\sin 2t}{t}\, dt\right) = F_1(s-2)$

$$F_1(s) = \mathcal{L}\int_0^t e^{-t}\frac{\sin 2t}{t}\, dt = \frac{1}{s}F_2(s)$$

$$F_2(s) = \mathcal{L}e^{-t}\frac{\sin 2t}{t} = F_3(s+1)$$

$$F_3(s) = \mathcal{L}\frac{\sin 2t}{t} = \int_s^\infty \frac{2}{u^2+4}\, du =$$

$$\tan^{-1}\frac{u}{2}\Big|_s^\infty = \cot^{-1}\frac{s}{2}$$

$$F_2(s) = \cot^{-1}\frac{s+1}{2}, \quad F_1(s) = \frac{1}{s}\cot^{-1}\frac{s+1}{2}$$

$$F(s) = \frac{1}{s-2}\cot^{-1}\frac{s-1}{2}$$

۱۱) $\mathcal{L}(۱-\cos t)=\frac{۱}{s}-\frac{s}{s^۲+۱}$

$$\mathcal{L}\frac{۱-\cos t}{t}=\int_s^\infty\left(\frac{۱}{u}-\frac{u}{u^۲+۱}\right)du=\ln\frac{\sqrt{s^۲+۱}}{s}$$

$$\mathcal{L}\frac{۱-\cos t}{t^۲}=\int_s^\infty \ln\frac{\sqrt{u^۲+۱}}{u}\,du=$$

$$s\ln\frac{s}{\sqrt{s^۲+۱}}+\frac{\pi}{۲}-\tan^{-۱}s$$

۱۲) $F(s)=\mathcal{L}\left(t\int_۰^t e^{۳t}\frac{\sinh t}{t}\,dt\right)=-F_۱'(s)$

$$F_۱(s)=\mathcal{L}\left(\int_۰^t e^{۳t}\frac{\sinh t}{t}\,dt\right)=\frac{۱}{s}F_۲(s)$$

$$F_۲(s)=\mathcal{L}e^{۳t}\frac{\sinh t}{t}=F_۳(s-۳)$$

$$F_۳(s)=\mathcal{L}\frac{\sinh t}{t}=\int_s^\infty\frac{du}{u^۲-۱}=$$

$$\frac{۱}{۲}\ln\frac{s+۱}{s-۱},\quad F_۲(s)=\frac{۱}{۲}\ln\frac{s-۲}{s-۴}$$

$$F_۱(s)=\frac{۱}{۲s}\ln\frac{s-۲}{s-۴},\quad F(s)=-F_۱'(s)=$$

$$\frac{۱}{۲s^۲}\ln\frac{s-۲}{s-۴}+\frac{۱}{s(s-۲)(s-۴)}$$

۱۳) $F(s)=\mathcal{L}\left(t\int_۰^t e^{-۳t}\frac{۱-\cos t}{t}\,dt\right)=-F_۱'(s)$

$$F_۱(s)=\mathcal{L}\left(\int_۰^t e^{-۳t}\frac{۱-\cos t}{t}\,dt\right)=\frac{۱}{s}F_۲(s)$$

$$F_۲(s)=\mathcal{L}e^{-۳t}\frac{۱-\cos t}{t}=F_۳(s+۳)$$

$$F_۳(s)=\mathcal{L}\frac{۱-\cos t}{t}=\int_s^\infty\left(\frac{۱}{u}-\frac{u}{u^۲+۱}\right)=$$

$$\ln\frac{\sqrt{s^۲+۱}}{s},\quad F_۲(s)=\ln\frac{\sqrt{(s+۳)^۲+۱}}{s+۳}$$

$$F_۱(s)=\frac{۱}{s}\ln\frac{\sqrt{(s+۳)^۲+۱}}{s+۳}$$

$$F(s)=-F_۱'(s)=\frac{۱}{s^۲}\ln\frac{\sqrt{(s+۳)^۲+۱}}{s+۳}-\frac{s+۳}{s((s+۳)^۲+۱)}+\frac{۱}{s(s+۳)}$$

مجموعه مسائل ۷.۶

کانولوشن های زیر راپیدا کنید.

$۱)\ (sint) * (\cos t)$ $\quad ۲)\ t * e^{at}$

$۳)\ (\sin ۳t) * e^{۲t}$ $\quad ۴)\ (\sin ۲t) * (\sin ۴t)$

$۵)\ ۱ * \sin t$

تبدیل معکوس توابع زیر رابدست آورید.

$۶)\ \frac{۱}{s^۳ - ۵s^۲}$ $\quad ۷)\ \frac{۲}{s^۲(s^۲ + ۴)}$

$۸)\ \frac{۱}{s+۱} \ln \frac{s}{s-۱}$ $\quad ۹)\ \frac{s}{s^۲+۱} \cot^{-۱}(s+۱)$

$۱۰)\ \frac{۱}{(s+۱)(s^۲+۱)}$

تبدیل لاپلاس توابع زیر رابدست آورید.

$۱۱)\ f(t) = \int_۰^t (t-\lambda)^۳ \sin\lambda\, d\lambda$

$۱۲)\ f(t) = \int_۰^t \lambda^۵ e^{۳(t-\lambda)}\, d\lambda$ $\quad ۱۳)\ f(u) = \int_۰^u (u-t)^۳ t^۵\, dt$

معادلات زیر راحل کنید.

$۱۴)\ y(t) = t^۲ + \int_۰^t \sin(t-\lambda) y(\lambda)\, d\lambda$

$۱۵)\ y(t) = ۱ - \int_۰^t (t-\lambda) y(\lambda)\, d\lambda$

$۱۶)\ y(t) = e^{-t} - ۲\int_۰^t \cos(t-\lambda) y(\lambda)\, d\lambda$

$۱۷)\ y'(t) + ۲y + \int_۰^t y(\lambda)\, d\lambda, \quad y(۰) = ۱$

حل مجموعه مسائل ۷.۶

$۱)\ (sint) * (\cos t) = \int_۰^t \sin\lambda\ \cos(t-\lambda)\, d\lambda =$

$\frac{۱}{۲}\int_۰^t (\sin t + \sin(۲\lambda - t))\, d\lambda = \frac{۱}{۲} t\ sint$

$۲)\ t * e^{at} = \int_۰^t (t-\lambda) e^{at} d\lambda = \frac{۱}{a^۲}\left(e^{at} - at - ۱\right)$

$۳)\ (\sin ۳t) * e^{۲t} = \int_۰^t e^{۲(t-\lambda)} \sin ۳\lambda\, d\lambda =$

$e^{۲t}\int_۰^t e^{-۲\lambda} \sin ۳\lambda\, d\lambda = e^{۲t}\Big[\frac{e^{-۲\lambda}}{۹}(-۲\sin ۳\lambda - ۳\cos ۳\lambda)\Big]_۰^t =$

$-\frac{۹}{۳۹}\left(\cos ۳t + \frac{۲}{۳}\sin ۳t - e^{۲t}\right)$

$۴)\ (\sin ۲t) * (\sin ۴t) = \int_۰^t \sin ۲\lambda\ \sin ۴(t-\lambda)\, d\lambda =$

$\sin ۴t\Big[\frac{\cos ۲\lambda}{۴} - \frac{\cos ۶\lambda}{۱۲}\Big]_۰^t -$

$\cos ۴t\Big[\frac{\sin ۲\lambda}{۴} - \frac{\sin ۶\lambda}{۱۲}\Big]_۰^t = \frac{-۱}{۶}\sin ۴t + \frac{۱}{۳}\sin ۲t$

$۵)\ ۱ * \sin t = \int_۰^t \cos\lambda\, d\lambda = ۱ - \cos t$

$۶)\ \frac{۱}{s^۲(s-۵)}, \quad F(s) = \frac{۱}{s^۲}, \quad f(t) = t$

$G(s) = \frac{۱}{s-۵}, \quad g(t) = e^{۵t}, \quad \mathcal{L}^{-۱}F(s)G(s) = (f*g)(t) =$

$t * e^{۵t} = \int_۰^t (t-\lambda) e^{۵t} d\lambda = \frac{۱}{۲۵}\left(e^{۵t} - ۵t - ۱\right)$

$۷)\ F(s) = \frac{۱}{s^۲}, \quad f(t) = t$

$G(s) = \frac{۲}{s^۲+۴}, \quad g(t) = \sin ۲t, \quad \mathcal{L}^{-۱}F(s)G(s) = (f*g)(t) =$

$$t * \sin ۲t = \int_۰^t (t-\lambda)\sin ۲\lambda\, d\lambda = \frac{۱}{۲}\left(t - \frac{۱}{۲}\sin ۲t\right)$$

۸) $F(s)=\frac{۱}{s+۱},\quad f(t)=e^{-t}$

$$G(s)=\ln\frac{s}{s-۱},\quad g(t)=\frac{-۱}{t}\mathcal{L}^{-۱}G'(s)=$$

$$\frac{۱}{t}\mathcal{L}^{-۱}\frac{۱}{s(s-۱)} = \frac{۱}{t}\int_۰^\infty e^t\,dt = \frac{۱}{t}(e^t-۱)$$

$$\mathcal{L}^{-۱}F(s)G(s)=(f*g)(t)=e^{-t}*\frac{e^t-۱}{t}=$$

$$\int_۰^t e^{-(t-\lambda)}\frac{e^{\lambda}-۱}{\lambda}d\lambda = e^{-t}\int_۰^t \frac{e^{۲\lambda}-e^{\lambda}}{\lambda}\,d\lambda$$

۹) $F(s)=\frac{s}{s^۲+۱},\quad f(t)=\cos t$

$$G(s)=\cot^{-۱}(s+۱),\quad g(t)=\frac{۱}{t}e^{-t}\sin t$$

$$\mathcal{L}^{-۱}F(s)G(s)=(f*g)(t)=\cos t*\frac{e^{-t}\sin t}{t}=$$

$$\int_۰^t \cos(t-\lambda)\frac{e^{-\lambda}\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda=$$

۱۰) $F(s)=\frac{۱}{s+۱},\quad f(t)=e^{-t}$

$$G(s)=\frac{۱}{s^۲+۱},\quad g(t)=\sin t$$

$$\mathcal{L}^{-۱}F(s)G(s)=(f*g)(t)=e^{-t}*\sin t=$$

$$\int_۰^t e^{-(t-\lambda)}\sin\lambda\,d\lambda=\frac{۱}{۲}(\sin t-\cos t+e^{-t})$$

۱۱) $f_۱(t)=t^۳,\quad f_۲(t)=\sin t$

$$F_۱(s)=\frac{۳!}{s^۴},\quad F_۲(s)=\frac{۱}{s^۲+۱}$$

$$f(t)=f_۱(t)*f_۲(t)\Rightarrow F(s)=\frac{۳!}{s^۴(s^۲+۱)}$$

۱۲) $f_۱(t)=t^۵,\quad f_۲(t)=e^{۳t}$

$$F_۱(s)=\frac{۵!}{s^۶},\quad F_۲(s)=\frac{۱}{s-۳}$$

$$f(t)=f_۱(t)*f_۲(t)\Rightarrow F(s)=\frac{۵!}{s^۶(s-۳)}$$

۱۳) $f_۱(u)=u^۳,\quad f_۲(u)=u^۵$

$$F_۱(s)=\frac{۳!}{s^۴},\quad F_۲(s)=\frac{۵!}{s^۶}$$

$$f(t)=f_۱(t)*f_۲(t)\Rightarrow F(s)=\frac{۳!\times ۵!}{s^{۱۰}}$$

۱۴) $Y(s)=\frac{۲!}{s^۳}+\mathcal{L}(\sin t*y)=\frac{۲}{s^۳}+\frac{۱}{s^۲+۱}\times Y(s)$

$$Y(s)=\frac{۲}{s^۳}+\frac{۲}{s^۵}\Rightarrow y(t)=t^۲+\frac{t^۴}{۱۲}$$

۱۵) $Y(s)=\frac{۱}{s}+\mathcal{L}(t*y)=\frac{۱}{s}+\frac{۱}{s^۲}Y(s)$

$$Y(s)=\frac{۱}{s^۲+۱}\Rightarrow y(t)=\cos t$$

۱۶) $Y(s)=\frac{۱}{s+۱}-\mathcal{L}(\cos t*y)=\frac{۱}{s+۱}-۲\frac{s}{s^۲+۱}\times Y(s)$

$$Y(s)=\frac{۱}{s+۱}-\frac{۲}{(s+۱)^۲}+\frac{۲}{(s+۱)^۳}\Rightarrow y(t)=e^{-t}(۱-t)^۲$$

۱۷) $sY(s)-y(۰)+۲Y(s)+\mathcal{L}(۱*y)=۰$

$$sY(s)-۱+۲Y(s)+\frac{۱}{s}\times Y(s)=۰\Rightarrow Y(s)=\frac{s}{(s+۱)^۲}=$$

$$\frac{۱}{s+۱}-\frac{۱}{(s+۱)^۲}\Rightarrow y(t)=e^{-t}(۱-t)$$

مجموعه مسائل ۸.۶

تبدیل لاپلاس توابع متناوب زیر رابدست آورید.

$$1)\ f(t)=\begin{cases}\cos 4t & 0<t<\frac{\pi}{4}\\ 0 & \frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2}\end{cases},\quad f(t+\frac{\pi}{2})=f(t)$$

$$2)\ f(t)=\pi-t,\ 0<t<2\pi,\quad f(t+2\pi)=f(t)$$

$$3)\ f(t)=\begin{cases}t & 0\le t<1\\ 2-t & 1\le t<2\end{cases},\quad f(t+2)=f(t)$$

$$4)\ f(t)=\begin{cases}2 & 0\le t<3\\ 0 & 3\le t<6\end{cases},\quad f(t+6)=f(t)$$

$$5)\ f(t)=\begin{cases}\sin^2 2t & 0\le t<\frac{\pi}{2}\\ \cos^2 2t & \frac{\pi}{2}\le t<\pi\end{cases},\quad f(t+\pi)=f(t)$$

$$6)\ f(t)=\begin{cases}t & 0\le t<\frac{1}{2}\\ 1-t & \frac{1}{2}\le t<\frac{3}{2}\\ t-2 & \frac{3}{2}\le t<2\end{cases},\quad f(t+2)=f(t)$$

۷) تبدیل لاپلاس وتبدیل لاپلاس یکسوشده نیم موجی ویکسوشده تمام موجی تابع زیر رابدست آورید.

$$f(t)=\begin{cases}t & 0\le t<\frac{1}{2}\\ 1-t & \frac{1}{2}\le t<\frac{3}{2}\end{cases},\quad f(t+1)=f(t)$$

۸) تبدیل لاپلاس یکسوشده نیم موجی ویکسوشده تمام موجی تمرین ۶ رابدست آورید.

۹) تبدیل لاپلاس یکسوشده تمام موجی $\sin t$ رابدست آورید.

حل مجموعه مسائل ۸.۶

$$1)\ \mathcal{L}f(t)=\frac{1}{1-e^{-s\pi/2}}\int_0^{\pi/2}e^{-st}\cos 4t\,dt=\frac{se^{s\pi/4}}{(s^2+16)(e^{s\pi/4}-1)}$$

$$2)\ \mathcal{L}f(t)=\frac{1}{1-e^{-2s\pi}}\int_0^{2\pi}e^{-st}(\pi-t)\,dt=$$

$$\frac{1}{1-e^{-2s\pi}}\left(\frac{\pi}{s}(1-e^{-2s\pi})+\frac{2\pi}{s}e^{-2s\pi}+\frac{1}{s^2}(e^{-2s\pi}-1)\right)=$$

$$\frac{\pi}{s}\frac{1+e^{-2s\pi}}{1-e^{-2s\pi}}-\frac{1}{s^2}=\frac{\pi}{s}\frac{e^{-s\pi}(e^{s\pi}+e^{-s\pi})}{e^{-s\pi}(e^{s\pi}-e^{-s\pi})}=$$

$$\frac{\pi}{s}\coth\pi s-\frac{1}{s^2}$$

$$3)\ \mathcal{L}f(t)=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}t\,dt+\int_1^2 e^{-st}(2-t)\,dt\right]=$$

$$\frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})}$$

$$4)\ \mathcal{L}f(t)=\frac{1}{1-e^{-6s}}\int_0^3 2e^{-st}\,dt=\frac{2(1-e^{-3s})}{s(1-e^{-6s})}=$$

$$\frac{2e^{3s}}{s(e^{3s}+1)}$$

$$5)\ \mathcal{L}f(t)=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\left[\int_0^{\pi/2}e^{-st}\sin^2 2t\,dt+\int_{\pi/2}^{\pi}e^{-st}\cos^2 2t\,dt\right]$$

$$=\frac{s^2+8(e^{s\pi/2}+1)}{s(1+e^{s\pi/2})(s^2+16)}$$

$$6)\ \mathcal{L}f(t)=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^{1/2}e^{-st}t\,dt+\int_{1/2}^{3/2}e^{-st}(1-t)\,dt\right.$$

$$\left.+\int_{3/2}^{2}e^{-st}(t-2)\,dt\right]=\frac{(1-e^{-s/2})^2}{s^2(1+e^{-s})}$$

$$7)\ a)\ \mathcal{L}f(t)=\frac{1}{1-e^{-s}}\left[\int_0^{1/2}te^{-st}\,dt+\int_{1/2}^{1}(t-1)e^{-st}\,dt\right]=$$

$$\frac{e^{s} - se^{s/2} - 1}{s^{2}(e^{s} - 1)}$$

b) $\mathcal{L}f(t) = \dfrac{1}{1 - e^{-s}} \displaystyle\int_{0}^{1/2} te^{-st}\,dt$

c) $\mathcal{L}f(t) = \dfrac{1}{1 - e^{-s/2}} \displaystyle\int_{0}^{1/2} te^{-st}\,dt$

8) a) $\mathcal{L}f(t) = \dfrac{1}{1 - e^{-2s}}\Big[\displaystyle\int_{0}^{1/2} te^{-st}\,dt + \int_{1/2}^{1} (1 - t)e^{-st}\,dt\Big] =$

$$\frac{e^{-s} - 2e^{-s/2} + 1}{s^{2}(1 - e^{-2s})}$$

b) $\mathcal{L}f(t) = \dfrac{1}{1 - e^{-s}}\Big[\displaystyle\int_{0}^{1/2} te^{-st}\,dt + \int_{1/2}^{1} (1 - t)e^{-st}\,dt\Big] =$

$$\frac{e^{-s} - 2e^{-s/2} + 1}{s^{2}(1 - e^{-s})} = \frac{e^{s/2} - 1}{s^{2}(e^{s/2} + 1)}$$

9) $\mathcal{L}f(t) = \dfrac{1}{1 - e^{-s\pi}} \displaystyle\int_{0}^{\pi} e^{-st} \sin t\,dt =$

$$\frac{1}{1 - e^{-s\pi}} \left(\frac{1}{s^{2} + 1}(1 + e^{-s\pi}) \right) = \frac{1}{s^{2} + 1} \coth \frac{s\pi}{2}$$

مجموعه مسائل ۹.۶

دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

1) $\begin{cases} y_1'(t) + y_2'(t) - y_1(t) = 6 - t \\ y_1'(t) + y_2'(t) + y_2(t) = 3 + \frac{1}{3}t^{3} \end{cases}, \quad y_1(0) = -5, \quad y_2(0) = 2$

2) $\begin{cases} 3y_1'(t) + y_2'(t) = 6\cos t - 2\sin 2t \\ y_2'(t) - y_1'(t) + 2y_1(t) + 2y_2(t) = 6e^{2t} \end{cases}, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 4$

3) $\begin{cases} y_1''(t) + y_2''(t) - y_2'(t) = 6 \\ y_1''(t) + 3y_2(t) = 9t^{2} - 2 \end{cases},$

$y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = -0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = -2$

4) $\begin{cases} y_1''(t) + 5y_2''(t) = 10 \\ y_2''(t) + 3y_2'(t) + y_1'(t) = 6t + 1 \end{cases},$

$y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = -11, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 2$

5) $\begin{cases} y_1''(t) - y_2'(t) = e^{t} + 2t \\ y_2''(t) + 4y_2(t) = -4t^{2} - 10 \end{cases},$

$y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 3, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0$

حل مجموعه مسائل ۹.۶

$$۱)\begin{cases} sY_۱ + ۵ + sY_۲ - ۲ - Y_۱ = \frac{۶}{s} - \frac{۱}{s^۲} \\ sY_۱ + ۵ + sY_۲ - ۲ + Y_۱ = \frac{۳}{s} + \frac{۲}{s^۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-۱)Y_۱ + sY_۲ = \frac{۶s - ۱ - ۳s^۲}{s^۲} \\ sY_۱ + (s+۱)Y_۲ = \frac{۳s^۳ + ۲ - ۳s^۲}{s^۲} \end{cases}$$

معادله اول را در $-s$ و معادله دوم را در $(۱-s)$ ضرب و با هم جمع می کنیم.

$$Y_۲ = \frac{۲}{s^۴} - \frac{۲}{s^۳} + \frac{۲}{s}$$

$$y_۲(t) = \frac{۱}{۳}t^۳ - t^۲ + ۲$$

با جایگذاری $Y_۲$ در معادله دوم داریم.

$$Y_۱ = \frac{۲}{s^۳} + \frac{۱}{s^۲} - \frac{۵}{s} \Rightarrow y_۱(t) = t^۲ + t - ۵$$

$$۲)\begin{cases} ۳sY_۱ - ۳ + sY_۲ - ۴ = \frac{۶s}{s^۲+۴} - \frac{۴}{s^۲+۴} \\ sY_۲ - ۴ - sY_۱ + ۱ + ۲Y_۱ + ۲Y_۲ = \frac{۶}{s-۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳Y_۱ + Y_۲ = \frac{۶s + ۲۴ + ۷s^۲}{s(s^۲+۴)} \\ (۲-s)Y_۱ + (s+۲)Y_۲ = \frac{۳s}{s-۲} \end{cases}$$

معادله اول را در $-(s+۲)$ ضرب و با هم جمع می کنیم.

$$Y_۱ = \frac{۳}{s} + \frac{۲}{s^۲+۴} - \frac{۳}{۲(s+۱)}\frac{۱}{۲(s-۲)} \Rightarrow$$

$$y_۱(t) = ۳ + \sin ۲t - \frac{۳}{۲}e^{-t} - \frac{۱}{۲}e^{۲t}$$

با جایگذاری $Y_۱$ در معادله اول داریم.

$$Y_۲ = -\frac{۳}{s} + \frac{s}{s^۲+۴} + \frac{۹}{۲(s+۱)} + \frac{۳}{۲(s-۲)}$$

$$\Rightarrow y_۲(t) = -۳ + \cos ۲t + \frac{۹}{۲}e^{-t} + \frac{۳}{۲}e^{۲t}$$

$$۳)\begin{cases} s^۲Y_۱ + s^۲Y_۲ + ۲ - sY_۲ = \frac{۶}{s} \\ s^۲Y_۱ + ۳Y_۲ = \frac{۱۸}{s^۳} - \frac{۲}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^۲Y_۱ + (s^۲-۴)Y_۲ = \frac{۶-۲s}{s} \\ s^۲Y_۱ + ۳Y_۲ = \frac{۱۸}{s^۳} - \frac{۲}{s} \end{cases}$$

معادله دوم را در $-$ ضرب و با هم جمع می کنیم.

$$Y_۲ = \frac{۶}{s^۳} - \frac{۲}{s^۲} \Rightarrow y_۲(t) = ۳t^۲ - ۲t$$

با جایگذاری $Y_۲$ در معادله دوم داریم.

$$Y_۱ = \frac{۶}{s^۴} - \frac{۲}{s^۳} \Rightarrow y_۱(t) = t^۳ - t^۲$$

$$۴)\begin{cases} s^۲Y_۱ + ۱۱ + ۵s^۲Y_۲ - ۱۰ = \frac{۱۰}{s} \\ s^۲Y_۲ - ۲ + ۳sY_۲ + sY_۱ = \frac{۶}{s^۲} + \frac{۱}{s} \end{cases}$$

از معادله اول داریم $Y_۱ = \frac{۱۰}{s^۳} - \frac{۱}{s^۲ - ۵Y_۲}$.با جایگذاری $Y_۱$ در معادله دوم داریم

$$Y_۲ = \frac{-۴}{s^۳(s-۲)} + \frac{۲}{s^۲(s-۲)} + \frac{۲}{s(s-۲)}$$

$$y_۲ = t^۲ + e^{۲t} - ۱, \quad y_۱ = ۵ - t - ۵e^{۲t}$$

$$۵)\begin{cases} s^۲Y_۱ - ۳s - sY_۲ = \frac{۱}{s-۱} + \frac{۲}{s^۳} \\ s^۲Y_۲ + ۴Y_۲ = -\frac{۸}{s^۳} - \frac{۱۰}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^{2}Y_{1} - sY_{2} = \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{2}{s^{3}} + 3s \\ (s^{2}+4)Y_{2} = -\dfrac{8}{s^{3}} - \dfrac{10}{s} \end{cases}$$

از معادله دوم داریم.

$$Y_{2} = \frac{2s}{s^{2}+4} - \frac{2}{s^{3}} - \frac{2}{s}$$
$$\Rightarrow y_{2}(t) = 2\cos 2t - t^{2} - 2$$

با جایگذاری Y_{2} در معادله اول داریم.

$$Y_{1} = \frac{4}{s^{2}+4} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$
$$\Rightarrow y_{1}(t) = \sin 2t + e^{t} - 1$$

مسائل تکمیلی

حل معادلات خطی با ضرایب متغییر بکمک تبدیل لاپلاس

مثال معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$ty'' + (3t-1)y' - (4t+9)y = 0, \quad y(0) = 0$$

حل با استفاده از قضیه ۱۱.۶ داریم

$$\mathcal{L}(ty'') + 3\mathcal{L}(ty') - \mathcal{L}y' - 4\mathcal{L}(ty) - 9\mathcal{L}y = 0$$
$$-(\mathcal{L}y'')' - 3(\mathcal{L}y')' - s\mathcal{L}y + y(0) + 4(\mathcal{L}y)' - 9\mathcal{L}y = 0$$
$$-(s^{2}Y - sy(0) - y'(0))' - 3(sY - y(0))' - sY + 4Y' - 9Y = 0$$
$$-2sY - s^{2}Y' - 3Y - 3sY' - sY + 4Y' - 9Y = 0$$
$$Y' = -\frac{3s+12}{s^{2}+3s-4}Y \Rightarrow \frac{dY}{Y} = -\frac{3}{s-1}\,ds$$
$$\ln Y = \ln c(s-1)^{-3}, \quad Y = \frac{c}{(s-1)^{3}}$$
$$y = c\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s-1)^{3}} \Rightarrow y = ct^{2}e^{t}$$

مثال با استفاده از تبدیل لاپلاس، لاپلاس تابع $J_{0}(t)$ را محاسبه کنید.

حل تابع $J_{0}(t)$ جواب معادله بسل مرتبه صفر می باشد. لذا کافیست تبدیل لاپلاس جواب معادله زیر را پیدا کنیم.

$$ty'' + y' + ty = 0, \quad y(0) = 1$$

$$\mathcal{L}(ty'') + \mathcal{L}y' + \mathcal{L}ty = 0$$
$$-(\mathcal{L}y'')' + \mathcal{L}y' + (\mathcal{L}y)' = 0$$
$$-(s^{2}Y - s - y'(0))' + (sY - 1) + Y' = 0$$

$$-2sY - s^2Y' + 1 + sY - 1 + Y' = 0$$

$$Y' = -\frac{s}{s^2+1}Y \Rightarrow \frac{dY}{Y} = -\frac{s}{s^2+1}\,ds$$

$$\ln Y = \ln c(s^2+1)^{-1/2}, \quad Y = \mathcal{L}J_0(t) = \frac{c}{\sqrt{s^2+1}}$$

۱) معادلات زیر را حل کنید.

$a)\ y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$

$b)\ y'' + 2y' + y = te^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

$c)\ y''' + y'' - y' - y = e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2$

$d)\ y' + 3y + 2\int_0^t y\,dt = f(t), \quad y(0) = 1, \quad f(t) = 2, \ 1 < t < 2$

$e)\ y'' + 2y' + y = e^{-t} - e^{-(t-1)}u_1(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$

$f)\ y' + 2y + 2\int_0^t y\,dt = u_2(t), \quad y(0) = 1$

$g)\ y'' + 4y' + 13y = \frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$

۲) تبدیل لاپلاس معادلات زیر را بدست آورید.

$a)\ ty'' + (2t+3)y' + (t+3)y = 3e^{-t}, \quad y(0) = 0$

$b)\ ty'' + 2(2t-1)y' + 4(t-1)y = 0$

$c)\ ty'' + 2(2t-1)y' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 8$

$d)\ ty'' + y = 0, \quad y(0) = 0$

$e)\ ty'' - (2+t)y' + 3y = t - 1, \quad y(0) = 0$

$f)\ y'' + ty' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$

جوابی برای معادله $t^2y'' + 4ty' + 2y = f(t)$ پیدا کنید، اگر $f(t)$ برابر باشد با

$g)\ t^n, \quad h)\ \mathcal{L}^{-1}\left(s^2\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{s^2+1}\right)$

$i)\ \mathcal{L}^{-1}\left(s^2\frac{d^2}{ds^2}H(s)\right)$

۳) نشان دهید که

$a)\ \int_0^\infty J_0(x)\,dx = 1$

$b)\ J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(x\cos t)\,dt$

$c)\ \frac{\pi}{2}e^{-x} = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}\,dt$

$d)\ \mathcal{L}\left(L_n(t)\right) = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$

$e)\ \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$

$f)\ \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}e^{-x}$

$g)\ \mathcal{L}\left(tJ_0(at)\right) = \frac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$

$h)\ \mathcal{L}\left(J_2(at)\right) = \frac{a^2}{\sqrt{s^2+a^2}\,(s+\sqrt{s^2+a^2})^2}$

$i)\ \int_0^\infty e^{-at}J_0(bt)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$j)\ \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{\sqrt{s^2+4s+13}} = e^{-2t}j_0(3t)$

$k)\ \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s+a)\sqrt{s^2+b^2}} = e^{-at}\int_0^\infty e^{ax}J_0(bx)\,dx$

$l)\ \mathcal{L}\left(J_1(at)\right) = \frac{a}{\sqrt{s^2-a^2}\,(s+\sqrt{s^2-a^2})^2}$

$m)\ \int_{۰}^{t} J_{۰}(a)J_{۰}(t-a)\,da = \sin t$

$n)\ \mathcal{L}^{-۱}\dfrac{۱}{\sqrt{s^{۴}+۵s^{۲}+۴}} = \int_{۰}^{t} J_{۰}(۲a)J_{۰}(t-a)\,da$

۴) معادلات انتگرالی زیر را حل کنید.

$a)\ y(t) = e^{t}\left(۱+\int_{۰}^{t} e^{-\lambda}y(\lambda)\,d\lambda\right)$

$b)\ ۳\sin ۲t = y(t)+\int_{۰}^{t}(t-\lambda)y(\lambda)\,d\lambda$

$c)\ y(t)+\int_{۰}^{t}(t-a)y(a)\,da = \sin ۲t$

$d)\ y(t)+\int_{۰}^{t}\sin(t-a)y(a)\,da = t$

نشان دهید که

$e)\ \int_{۰}^{t}\sin(t-a)J_{۰}(a)\,da = tJ_{۱}(t)$

$f)\ \int_{۰}^{t}\cos(t-a)J_{۰}(a)\,da = tJ_{۰}(t)$

$g)\ \int_{۰}^{t}J_{۰}(t-a)J_{۱}(a)\,da = J_{۰}(t)-\cos t$

$h)\ \mathcal{L}^{-۱}\left(\dfrac{۱}{\sqrt{s}(s-۱)}\right) = \dfrac{۲e^{t}}{\sqrt{\pi}}\int_{۰}^{t}e^{-v^{۲}}\,dv$

۵) فرض کنید، توابع زیر متناوب با دوره تناوب ۲π باشند. تبدیل لاپلاس هر یک را محاسبه کنید.

$a)\ f(t)=e^{t},\quad ۰<t<۲\pi$

$b)\ f(t)=۳\sin t/۲,\quad ۰<t<۲\pi$

$c)\ f(t)=t,\quad ۰<t<\pi \qquad f(t)=\pi-t,\quad \pi<t<۲\pi$

۶) تبدیل لاپلاس یکسو شده نیم موجی $\sin t$ را بنویسید.

۷) دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$a)\ \begin{cases} y_{۱}'' = y_{۱}+۳y_{۲} \\ y_{۲}'' = ۴y_{۱}-۴e^{t}\end{cases} \quad y_{۱}(۰)=۲,\quad y_{۱}'(۰)=۲,\quad y_{۲}(۰)=۱,\quad y_{۲}'(۰)=۳$

$b)\ \begin{cases} y_{۱}'+y_{۱}+۲y_{۲}'+۳y_{۲}=۰ \\ y_{۱}'-۴y_{۱}+۳y_{۲}'-۸y_{۲}=\sin t\end{cases} \quad y_{۱}(۰)=۲,\quad y_{۲}(۰)=-۱$

$c)\ \begin{cases} ۲y_{۱}'+y_{۱}+y_{۲}'+۳y_{۲}=۰ \\ y_{۱}'-۶y_{۱}+y_{۲}'-y_{۲}=۰\end{cases} \quad y_{۱}(۰)=۲,\quad y_{۲}(۰)=-۱$

$d)\ \begin{cases} y_{۱}''+y_{۲}'=۲ \\ y_{۱}''-y_{۲}''=۰\end{cases}$

$y_{۱}(۰)=۰,\quad y_{۱}'(۰)=۲,\quad y_{۲}(۰)=-۲,\quad y_{۲}'(۰)=۲$

$e)\ \begin{cases} y_{۱}'+y_{۲}'-y_{۲}=۲e^{t}+۱ \\ ۲y_{۱}''-y_{۲}'=e^{t}\end{cases}$

$y_{۱}(۰)=۲,\quad y_{۱}'(۰)=۳,\quad y_{۲}(۰)=۳$

$f)\ \begin{cases} y_{۱}''-y_{۲}'=\cos t \\ y_{۱}'+y_{۲}''=-\sin t\end{cases}$

$y_{۱}(۰)=۱,\quad y_{۱}'(۰)=۰,\quad y_{۲}(۰)=۰,\quad y_{۲}'(۰)=۱$

۸) تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

$a)\ \ln\dfrac{s^{۲}-۱}{s^{۲}}, \qquad b)\ \dfrac{۲}{(s^{۲}+۴)^{۲}}$

۹) اگر $F(s)$ برابر یکی از عبارتهای زیر باشد، تابع $f(t)$ را پیدا کنید.

$a)\ \dfrac{۵(۱-e^{-s})}{s(۱-e^{-۶s})} \qquad b)\ \dfrac{\int_{۰}^{۲}e^{-st}t^{۲}\,dt}{۱-e^{-۸۴}}$

تابع دلتای دیراک

فرض کنید در یک فاصله زمانی کوتاه، نیرویی بر جسمی اثر کند و نیروی بزرگی در آن ایجاد نماید. (مثلاً پرتاب راکت، شلیک توپ ...) و سپس متوقف شود. برای بحث بیشتر، مفهوم ضربه یکه را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید برای $a > 0$ تابع $h_a(t)$ روی فاصله $[0,\infty)$ بوسیله رابطه زیر تعریف شود

$$h_a(t)=\begin{cases}\frac{1}{a} & b\le t\le b+a\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases},\quad b\ge 0$$

به‌عبارت دیگر $h_a(t)=\frac{1}{a}(u_b(t)-u_{b+a}(t))$. توجه کنید که همواره حاصل‌ضرب طول فاصله زمان در اندازه تابع برابر یک است. حال اگر فاصله زمان (a) خیلی کوچک شود باید اندازه تابع بسیار بزرگ شود و حاصل‌ضرب تابع و زمان (a) وقتی $a\to 0$ برابر یک باقی می‌ماند این تابع را ضربه یکه $I(t)$ یا تابع دلتای دیراک $\delta(t)$ می‌نامند.

تابع دلتای دیراک اغلب به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$* \qquad \delta(t-b)=\lim_{a\to 0}h_a(t)=\begin{cases}0 & t\ne b\\ \infty & t=b\end{cases}\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-b)dt=1$$

این بی‌معنی است؟؟ چون مساحت زیر یک منحنی که همه‌جا جز در یک نقطه برابر صفر است مساوی یک شده است. اما اگر (*) را صرفاً ناشی از فرآیند حدی در نظر بگیریم که ابتدا ضربه یکه را توصیف می‌کنیم، تعریف بالا هر عیبی هم که داشته باشد، لااقل به‌اندازه مفاهیم دیگر در ریاضیات کاربردی، مفید می‌باشد و در بسیاری از کاربردهای فیزیکی که معادلات شامل نیروهای لحظه‌ای ضربه‌ای هستند، استفاده از این تابع مفید واقع می‌شود.

مثال نشان دهید که

$$\int_0^{\infty}\delta(t-b)dt=1$$

حل

$$\int_0^{\infty}\delta(t-a)dt=\int_0^{\infty}\lim_{a\to 0}h_a(t)dt=\lim_{a\to 0}\int_0^{\infty}h_a(t)dt$$

$$=\lim_{a\to 0}\int_b^{b+a}\frac{1}{a}dt=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\times a=1$$

مثال نشان دهید که اگر $g(t)$ یک تابع پیوسته در فاصله $[0,\infty)$ باشد، آنگاه برای هر $b\ge 0$ داریم

$$\int_0^{\infty}\delta(t-b)g(t)dt=g(b)$$

حل

$$\int_0^{\infty}\delta(t-b)g(t)dt=\lim_{a\to 0}\int_0^{\infty}h_a(t)g(t)dt=$$

$$\lim_{a\to 0}\int_b^{b+a}\frac{1}{a}g(t)dt=\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\int_b^{b+a}g(t)dt$$

بنابر قضیه مقدار میانگین برای انتگرال، عددی مانند $c\in(b,b+a)$ وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{\int_b^{b+a}g(t)dt}{a}=g(c)$$

بنابراین

$$\int_0^{\infty}\delta(t-b)g(t)dt=\lim_{a\to 0}g(c)=g(b)$$

(چون $g(t)$ تابعی پیوسته است، لذا $\lim_{\varepsilon\to 0}g(t+\varepsilon)=g(t)$)

مثال نشان دهید که

$$\mathcal{L}[\delta(t-b)]=e^{-bs}$$

حل ابتدا تبدیل لاپلاس تابع $h_a(t)$ را محاسبه و سپس حد آن را وقتی $a\to 0$ را به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}h_a(t)=\frac{1}{a}\mathcal{L}(u_b(t)-u_{b+a}(t))=\frac{1}{as}(e^{-bs}-e^{-(b+a)s})$$

$$=\frac{e^{-bs}}{as}(1-e^{-as})$$

و

$$\mathcal{L}[\delta(t-b)] = \frac{e^{-bs}}{s}\lim_{a\to 0}\frac{1-e^{-as}}{a} = e^{-bs}$$

توجه کنید که $\mathcal{L}\delta(t) = 1$.

مثال معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$4y'' + 4y' + 9y = 4\delta(t) + 7\delta(t-3), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

حل از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم

$$4\mathcal{L}y'' + 4\mathcal{L}y' + 9\mathcal{L}y = 4\mathcal{L}\delta(t) + 7\mathcal{L}\delta(t-3)$$

$$4s^2Y + 4sY + 9Y = 4 + 7e^{-3s}$$

$$Y = \frac{4+7e^{-3s}}{4s^2+4s+9}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{4s^2+4s+9} = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{8}e^{-t/2}\sin\sqrt{2}t$$

و با استفاده از قضیه دوم انتقال

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t/2}\sin\sqrt{2}t + \frac{7\sqrt{2}}{8}e^{-(t-3)/2}\sin(\sqrt{2}(t-3))u_3(t)$$

جواب مسائل تکمیلی

$1)\ a)\ y = e^{-2t}\cos t, \quad b)\ y = te^{-t} + \frac{1}{6}t^3e^{-t}$

$c)\ y = \frac{5}{8}e^{t} - \frac{5}{8}e^{-t} - \frac{5}{4}te^{-t} - \frac{t^2}{4}e^{-t}$

$d)\ y = (2e^{-2t} - e^{-t}) + 2(e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)})u_1(t)$

$-2(e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)})u_2(t)$

$e)\ y = \frac{t^2e^{-t}}{2} - \frac{1}{2}(t-1)^2e^{-(t-1)}u_1(t)$

$f)\ y = e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t + e^{-(t-2)}\sin(t-2)u_2(t)$

$g)\ y = e^{-2t}\cos 3t + \frac{1}{54}e^{-2t}(\sin 3t - 3t\cos 3t)$

$2)\ a)\ y = te^{-t}, \quad b)\ y = y(0)e^{-2t} + ct^3e^{-2t}, \quad c)$ جواب ندارد

$d)\ y = c\left(t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{2!\times 3!} - + \cdots \frac{(-1)^nt^n}{(n-1)!\times n!}\cdots\right)$

$e)\ y = \frac{1}{2}t + ct^3, \qquad f)\ y = 5t$

$g)\ y = \frac{t^n}{n^2+3n+2}, \quad h)\ y = \sin t, \quad i)\ \mathcal{L}^{-1}H(s)$

$4)\ a)\ y = e^{2x}, \quad b)\ y = 4\sin 2x - 2\sin x$

$c)\ y = -\frac{2}{3}\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t, \quad d)\ y = \frac{t}{2} + \frac{\sin\sqrt{2}t}{2\sqrt{2}}$

$5)\ a)\ \frac{e^{2\pi(1-s)} - 1}{(1-s)(1-e^{-2\pi s})}$

$c)\ \left(\frac{\pi}{s}e^{-\pi s}(e^{-\pi s} - 1) + \frac{1}{s^2(e^{-\pi s}-1)^2}\right)/(1-e^{-2\pi s})$

$6)\ (s^2+1)^{-1}(1-e^{-s\pi})^{-1}$

$7)\ a)\ y_1 = e^{t} + e^{2t}, \quad y_2 = e^{2t}$

$b)\ y_1 = -\frac{2}{3}\cos t - \sin t + \frac{8}{3}\cos 2t + 2\sin 2t$

$y_2 = \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{3}\sin t - \frac{4}{3}\cos 2t - \frac{2}{3}\sin 2t$

$c)\ y_1 = -\frac{1}{2}e^{-t}(2\cos 4t + \sin 4t)$

$y_2 = \frac{1}{4}e^{-t}(8\cos 4t - \sin 4t)$

$d)\ y_1 = 2t, \quad y_2 = 2t - 2$

$e)\ y_1 = t + 2e^t, \quad y_2 = 3e^t$

$f)\ y_1 = 1 + t\sin t, \quad y_2 = t\cos t$

$8)\ a)\ \frac{2(1-\cosh t)}{t}, \quad b)\ -\frac{t}{4}\cos 2t + \frac{1}{8}\sin 2t$

$9)\ a)\ f(t) = 5,\ 0 < t < 1,\ \ f(t) = 0,\ 1 < t < 6,\ \ f(t+6) = f(t)$

$b)\ f(t) = t^2,\ 0 < t < 4,\ \ f(t) = 0,\ 4 < t < 8,\ \ f(t+8) = f(t)$

امتحان پایان ترم درس معادلات دیفرانسیل سال ۶۴

۱. معادله زیر را حل کنید

$x(1+x)^2y'' + (1-x^2)y' + (x-1)y = 0$ (۱۰ نمره)

۲. مطلوب است محاسبه الف: $\int_{-1}^{1} x^2 p_3(x)dx$ (۳ نمره)

ب: $\int_0^{\pi} p_m(\cos\alpha)p_n(\cos\alpha)\sin\alpha d\alpha$ (۳ نمره)

۳. معادله زیر را با استفاده از تغییر متغیر داده شده حل کنید (۸ نمره)

$(x^3y')' + x(x+1)y = 0 \quad y = x^{-1}u, \quad z = 2x^{\frac{1}{2}}$

۴. معادله زیر را حل کنید $y' + 8y + 15\int_0^t y dt = r(t)$ (۸ نمره)

$y(0) = 1, \quad r(t) = \begin{cases} 2 & \text{اگر } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$

۵. مطلوب است تبدیل لاپلاس $t\int_0^t e^{3t}\frac{\sin 4t}{t}dt$ (۶ نمره)

۶. با استفاده از تبدیل لاپلاس $\int_0^{\infty}\frac{t^2}{2^t}dt$ را محاسبه کنید (۴ نمره)

۷. الف: $\mathcal{L}^{-1}\frac{e^{-s/2}}{\sqrt{s+1}}$ (۵ نمره)

ب: $\mathcal{L}^{-1}\frac{10}{s}\cot y^{-1}\frac{s+4}{2}$ (۵ نمره)

۸. با استفاده از لاپلاس دستگاه زیر را حل کنید (۸ نمره)

$\begin{cases} y_1' + y_2'' = e^{-t} \\ y_1' + y_1 - y_2' = -1 \end{cases} \quad y_1(0) = 0 \quad y_2(0) = 0 \quad y_2'(0) = 0$

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل سال ۶۵

۱. الف: فاکتور انتگرال معادله زیر را پیدا کنید. (۶ نمره)

ب: معادله را حل کنید

$$y(y+2x+1)dx - x(2y+x-1)dy = 0$$

۲. معادله برنولی زیر را حل کنید (۶ نمره)

$$y' + x\tan y = x^3 \tan y \sin^5 y$$

۳. دستگاه زیر را حل کنید (۶ نمره)

$$\begin{cases} Dx + y = t^2 \sin t + te^t \\ -x + Dy = e^t \end{cases}$$

۴. معادله زیر را با استفاده از تغییر متغیر $U = y^2$ حل کنید (۶ نمره)

$$(xy' - y)^2 = -x^2 yy''$$

۵. معادله زیر را حل کنید (۸ نمره)

$$(1 + y'^2)y'y''' = (3y'^2 + 1)y''^2$$

۶. k را چنان تعیین کنید که $y = x^k$ یک جواب خصوصی معادله زیر باشد. (۸ نمره)

$$x(1+x)y'' + (x+2)y' - y = 0$$

و سپس معادله $x(1+x)y'' + (x+2)y' - y = e^x(1+x)^2$ را حل کنید

موفق باشید

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل

۱. معادله زیر را حل کنید $y(1) = 0$ و $xy' + \frac{x}{\sin\frac{y}{x}} = y$ (۶ نمره)

۲. الف: فاکتور انتگرال پیدا کنید. ب: معادله را حل کنید (۹ نمره)

$$y'\sin x = \tan x + y\cos x$$

۳. معادله زیر را حل کنید، جواب عمومی و جواب غیرعادی را پیدا کنید (۶ نمره)

$$\cos^2 y(dy)^2 + \sin x\cos x\cos y\,dy\,dx = \sin y\cos^2 x(dx)^2$$

(راهنمایی: $\sin x = z$ و $\sin y = T$)

۴. معادله زیر را حل کنید $y'' = \frac{y'^2}{2y}(1 + y'^2)$ (۸ نمره)

۵. جواب عمومی معادله زیر را بنویسید. y_p را با استفاده از روش ضرایب نامعین به‌دست آورید و فقط فرم جواب را بنویسید. (۶ نمره)

$$D(D^2+1)^3(D^2-4D+13)^2(D-2)y = x^2\cos x + 2 + (x+1)e^{2x}\sin 3x + x + x^2e^{2x} + xe^{2x}\sin x + \sin x$$

۶. معادله زیر را حل کنید (۷ نمره)

$$(x+2)^2y'' - 3(x+2)y' + 4y = \frac{\ln(x+2) + 1/2}{\ln^2(x+2)}$$

۷. معادله زیر را حل کنید (۶ نمره)

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = (2x+1)^3e^x$$

امتحان پایان‌ترم درس معادلات دیفرانسیل

۱. معادله $f_1(x)y''+f_2(x)y'+f_3(x)y=0$ که در آن f_1، f_2 و f_3 سه چندجمله‌ای هستند، مفروض است:

الف: نقطه $x=0$ چه موقع یک نقطه معمولی نامیده می‌شود، اگر $x=0$ یک نقطه معمولی باشد، طریق حل را بیان کنید.

ب: نقطه $x=0$ را چه موقع یک نقطه منفرد منظم می‌نامیم، اگر $x=0$ یک نقطه منفرد منظم باشد. طریق حل را به‌طور کامل شرح دهید (در سه حالت)

۲. الف: $f(x)=3x^3+4$ را برحسب چندجمله‌ای‌های لژاندر بسط دهید و به‌ازای مقادیر مختلف m انتگرال $\int_{-1}^{1} f(x)p_m(x)dx$ را ارزیابی کنید.

ب: $\int_{-1}^{1} p_n(x)dx$ را به‌ازای مقادیر مختلف n ارزیابی کنید.

(توجه: $n\geq 1$. $p_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xp_n(x)-\frac{n}{n+1}p_{n-1}(x)$)

۳. الف: نشان دهید $[x^{-\nu}J_\nu(x)]'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$

ب: نشان دهید $J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$

(توجه: $[x^\nu J_\nu(x)]'=x^\nu J_{\nu-1}(x)$)

پ: اگر $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ و $J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ باشد. مطلوب است $J_{5/2}(x)$

۴. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ را بنویسید.

$$f(t)=t^2e^{2t}\sin t\int_0^t \sin e^{2t}\frac{1-\cos t}{t}dt$$

۵. تبدیل معکوس تابع $F(s)$ را بنویسید.

$$F(s)=\frac{1}{S(S^2+2S+2)}\cot^{-1}S$$

۶. معادله زیر را حل کنید

$$y''-y=f(t),\quad t\geq 0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$$

$$f(t)=\begin{cases}0 & 0\leq t\leq 1\\ t-1 & t>1\end{cases}$$

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید

۱ − $xy' = y + x\tan\frac{y}{x}$

۲ − $(x^{4}\ln x - 2xy^{3})dx + 3x^{2}y^{2}dy = 0$

۳ − $y = x(1 + y') + y'^{2}$

۴ − $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^{2}}{y'} \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 4$

۵ − $x^{2}yy'' = (y - xy')^{2}$

۶ − $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$

۷ − $(x - 1)y'' - xy' + y = (x - 1)^{2}$

۸ − $x^{2}y'' - 6y = 12\ln x$

موفق باشید

امتحان معادلات دیفرانسیل

۱. $(1 + y^{2})dx = (\sqrt{1 + y^{2}}\cos y - xy)dy$

۲. $y = \frac{1}{2}(xy' + y'\ln y')$

۳. $y'' + 4y = \sec x \csc x$

۴. $2yy'' - 3y'^{2} = 4y^{2}$

۵. الف: $\int_0^1 (-\ln x)^{-1/2}dx$ ب: $\int_0^1 x^{3}J_0(x)dx$

۶. با استفاده از تغییر متغیر داده شده، جواب عمومی معادله زیر را بنویسید

$$y'' + \left(e^{x} - \frac{1}{4}\right)y = 0 \quad u = 2e^{x/2}, \quad e^{x} = \frac{u^{2}}{4}$$

۷. با استفاده از تبدیلات لاپلاس دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases} y_1''(t) - y_2'(t) = e^{t} + 2t \\ y_2''(t) + 4y_2(t) = -4t^{2} - 10 \end{cases}$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_2'(0) = 0 \quad y_1'(0) = 3$$

۸. تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید

$$F(S) = \frac{S}{(S^{2} + 1)^{2}}\ln\frac{S}{S - 1}$$

۹. تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید

الف: $f(t) = t^{2}\int_0^t e^{2t}\frac{1 - \cos t}{t}dt$

ب: $f(t) = te^{-t}\cos t$

امتحان معادلات دیفرانسیل

۱. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$y' = \frac{3y^3 - 2xy^2}{7 - 3xy^2}$$

۲. الف: k را طوری تعیین کنید که $y = kx$ در معادله $y' + 2y^2 - 2x^2 - 1 = 0$ صدق کنید (۲ نمره)

ب: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. (۶ نمره)

$$yy'' + (y')^2 - (2x^2 + 1)y^2 = 0$$

۳. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید (۸ نمره)

$$y'' = \frac{2xy'}{x^2 - y'^2 - 4}$$

(محاسبه انتگرال‌های نهایی لازم نیست).

۴. اگر y_1، y_2 دو جواب مستقل معادله همگن متناظر معادله زیر باشد: (۸ نمره)

$$y'' + y'f_1(x) + yf_2(x) = \tan x$$

در این‌صورت حل معادله فوق را تشریح کنید (روش حل را توضیح دهید).

۵. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$y'' + xy' + \left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right)^2 y = 0$$

۶. دستگاه معادلات زیر را حل کنید: (۷ نمره)

$$\begin{cases} (2D + 1)y_1 + Dy_2 = x \\ (D - 1)y_1 + Dy_2 = 2 \end{cases}$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

۱. اولاً نقطه منفرد منظم معادله $f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$ را تعریف کرده و سپس نقطه منفرد منظم معادله $x^2y'' - x(1 + x)y' + y = 0$ را به‌دست آورید. ثانیاً یک جواب معادلهٔ بالا را به‌دست آورده و سپس فرم جواب دوم و جواب عمومی را فقط بنویسید. (جمعاً ۹ نمره)

۲. الف: با استفاده از $(2n + 1)p_n(x) = p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x)$، $p_3(x)$ را محاسبه نمایید

ب: انتگرال زیر را محاسبه کنید $\int_{-1}^{1}(x^4 - 2x^2)p_7(x)dx$ (جمعاً ۸ نمره)

۳. معادله زیر را حل کنید (۸ نمره)

$$x^2y'' - 3xy' + (36x^6 - 5)y = 0 \quad y = x^2u, \quad z = 2x^3$$

۴. با استفاده از تبدیل لاپلاس نشان دهید که جواب معادله

$$ty'' + y' + ty = 0 - \ y(0) = 1$$

به‌صورت زیر می‌باشد (۲۰ نمره)

$$y(t) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \times 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots$$

۵. الف: کانولوشن دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ را تعریف کنید (جمعاً ۸ نمره)

ب: تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید

$$\frac{s}{s^2 + 1}\cot^{-1}(s + 1)$$

۶. اگر $f(t)$ متناوب، با دورهٔ تناوب a باشد، یعنی $f(t + a) = f(t)$، نشان دهید که

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-as}}\int_0^a e^{-ts}f(t)dt$$

و سپس تبدیل لاپلاس تابع زیر را به‌دست آورید (۹ نمره)

$$f(t)=t \quad 0\le t<1, \quad f(l+1)=f(t)$$

۷. دستگاه معادله زیر را حل کنید (۸ نمره)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+x+\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=e^t \\ \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d^2y}{dt^2}=e^{-t} \end{cases}$$

امتحان معادلات دیفرانسیل

۱. جواب عمومی معادله زیر را بنویسید.

$$e^x dx+(e^x \cot y+2y\csc y)dy=0$$

۲. جواب عمومی معادله $y=(1+y')x+y'^2$ را به‌دست آورید.

۳. جواب عمومی معادله زیر را به‌دست آورید.

$$D(D^2+4)y=x+x\cos 2x+1$$

۴. جواب عمومی معادله زیر را بنویسید.

$$(1+x^2)y''-2xy'+2y=\frac{1-x^2}{x}$$

۵. نشان دهید که $x=0$ یک نقطهٔ منفرد منظم معادله زیر می‌باشد و سپس یک جواب آن‌را به‌دست آورده و فقط فرم جواب دوّم و عمومی آن را بنویسید

$$x^2y''+2xy'-xy=0$$

۶. اولاً اگر

$$J_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

نشان دهید که

$$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x))=x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

ثانیاً اگر $\frac{d}{dx}(x^{-\nu}J_\nu(x))=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$ و $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ و $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ ثابت کنید $\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)=J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)$ و سپس مقدار $J_{-\frac{5}{2}}(x)$ را حساب کنید.

۷. الف: تبدیل لاپلاس تابع زیر را به‌دست آورید $t\int_{۰}^{t} e^{۳t}\frac{\sinh t}{t}dt$

ب: $f(t)$ را پیدا کنید اگر $F(s)=\frac{۱}{s}\tan^{-۱}\frac{۱}{s}$

۸. معادله زیر را حل کنید

$$y''(t)+y'(t)=\cot+\int_{۰}^{t}\sin(t-x)y'(x)dx \quad y(۰)=y'(۰)=۰$$

امتحان پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل

۱. نشان دهید $ax^{۴}+bx^{۲}+c$ یک جواب معادله $(۱-x^{۲})y''-۲xy'+۲۰y=۰$ می‌باشد. ضرایب b و c را به‌دست آورید اگر $a=\frac{(۲\times ۴)!}{۲^{۴}(۴!)^{۲}}$

۲. با استفاده از روش سری‌ها اگر $y_{۱}=x$ یک جواب معادله زیر باشد جواب دوم را به‌دست آورده و فرم جواب عمومی آن را بنویسید.

$$x^{۲}y''+x(x^{۲}-۱)y'+(۱-x^{۲})y=۰$$

۳. با استفاده از تغییر متغیر $Z=\frac{۲\sqrt{a}}{b+۲}\sqrt{x^{b+۲}}$ و $y=\sqrt{x}u$ معادله زیر را حل کنید

$$y''+ax^{b}y=۰$$

۴. اگر تابع $f(t)$ در شرایط قضیهٔ وجود تبدیل لاپلاس صدق کند و اگر $\lim_{t\to ۰^{+}}\frac{f(t)}{t}$ موجود باشد و $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ آنگاه

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_{s}^{\infty}F(u)du$$

۵. تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید

$$F(s)=\frac{۱}{(s-۲)^{۲}}\cot^{-۱}(s-۱)$$

۶. نشان دهید تبدیل لاپلاس تابع موج مثلثی متناوب

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{اگر} \quad ۰<t<a \\ ۲a-t & \text{اگر} \quad a<t<۲a \end{cases}$$

به‌صورت $\frac{۱}{s^{۲}}\tan h\frac{as}{۲}$ می‌باشد.

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل معمولی

۱ ـ الف ـ $f(x) = x^2 - 1$ را به صورت ترکیب خطی از چند جمله‌ای‌های لژاندر بیان کرده و سپس به ازای mهای مختلف انتگرال زیر را بررسی نمائید. (۸ نمره)

$$\int_{-1}^{1} f(x)Pm(x)dx$$

ب ـ نشان دهید $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (۶ نمره)

۲ ـ اگر $y_1 = x(3 + \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{3}{2^7}x^4 + \frac{1}{2^9}x^6 + \cdots)$ یک جواب معادله زیر باشد جواب دوم آنرا به دست آورید و فرم جواب عمومی آنرا نیز بنویسید. (۸ نمره)

$$x^2y'' + x(3 - x^2)y' - 3y = 0$$

۳ ـ اگر $J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu + m + 1)}(\frac{x}{2})^{2m+\nu}$ باشد نشان دهید برای هر دو عدد صحیح و مثبت داریم $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$ (۵ نمره)

ب ـ نشان دهید $\mathcal{L}[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{S^2 + 1}}$ (۳ نمره)

ج ـ انتگرال زیر را محاسبه نمائید. (۵ نمره)

$$\int_0^t J_0(\lambda)J_0(t - \lambda)d\lambda$$

۴ ـ معادله زیر را به وسیله تبدیل لاپلاس حل نمایید. (۷ نمره)

$$y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2t} \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 1$$

۵ ـ تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

الف : $f_1(t) = te^{-2t}\cos t$

ب : $f_2(t) = e^{-t}\int_0^t \sinh r dr$

ج : $f_3(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ t^2 & t \geq \pi \end{cases}$

۶ ـ الف ـ نشان دهید $a > 0$ و $\int_0^\infty \frac{e^{-at}\sin t}{t}dt = \cot^{-1} a$ (۴ نمره)

ب ـ تبدیل معکوس تابع زیر را به دست آورید. (۶ نمره)

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 4}\ln(\frac{s^2 + 1}{s^2})$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل (۶۸/۲/۱۳)

۱ ـ الف ـ نشان دهید $[J_0(x)]' = -J_1(x)$

ب ـ مطلوبست مقدار $\int_0^5 e^{-x^2}dx$

۲ ـ نشان دهید $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم می‌باشد و سپس معادله را حل کنید. (چهار جملهٔ اول هر یک از جوابها را بنویسید.)

$$x^2y'' + x(3 - x^2)y' - 3y = 0$$

۳ ـ الف ـ با استفاده از فرمول زیر $P_2(x)$ را حساب کنید.

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

ب ـ مطلوبست مقدار $\int_{-1}^{1}(x^3 + x)P_0(x)dx$

۴ ـ معادله زیر را حل کنید. $y'' + 9y = r(t)$

$$r(t) = \begin{cases} 4 & 2\pi \le t < 3\pi \\ 0 & 0 < t < 2\pi \ , \ t > 3\pi \end{cases}$$

$$y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 1$$

۵ ـ تبدیل لاپلاس تابع زیر را به دست آورید.

$$f(t) = t^2e^{3t}\int_0^t \frac{e^{2t} - e^{4t}}{t}dt$$

۶ ـ مطلوبست مقدار انتگرال $\int_0^\infty e^{-t}\frac{1 - \cos t}{t}dt$

۷ ـ تبدیل معکوس لاپلاس تابع زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 2}\ln\frac{s^2 + 4}{s^2}$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل (۶۹/۴/۲۷)

از هفت سئوال زیر فقط به شش سئوال پاسخ دهید.

۱ ـ با استفاده از تغییر متغیر $z = x^2$ و $y = ux^2$ معادله زیر را حل کنید.

$$x^2y'' - 3xy' + 4(x^4 - 3)y = 0$$

۲ ـ نشان دهید $\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

۳ ـ اولاً اگر $\frac{d(x^kJ_k(x))}{dx} = x^kJ_{k-1}(x)$ و $\frac{d(x^{-k}J_k(x))}{dx} = -x^{-k}J_{k+1}(x)$ نشان دهید

$$J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x) = 2J'_k(x)$$

ثانیاً نشان دهید

$$\frac{d^2(J_k(x))}{dx^2} = \frac{1}{4}[J_{k-2}(x) - 2J_k(x) + J_{k+2}(x)]$$

۴ ـ با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید

$$y'' + ty' - 2y = k \quad y(0) = y'(0) = 0$$

k عدد ثابتی می‌باشد

۵ ـ مقدار انتگرال زیر را به دست آورید.

$$\int_0^\infty e^{3t}\int_0^t e^{-t}\frac{\sin t}{t}dt$$

۶ ـ نشان دهید

$$\int_0^t (t-\lambda)^a\lambda^b d\lambda = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}t^{a+b+1} \quad a > -1 \ , \ b > -1 \ , \ t > 0$$

۷ ـ تبدیل معکوس تابع $\frac{s}{(s^2+1)^2}\ln\frac{s^2+1}{s(s+1)}$ را پیدا کنید.

امتحان ریاضی کاربردی (اردیبهشت ۷۰)

۱ ـ مسیر قائم بر دسته منحنی $(x+y)^۲ - ۴y = c$ را به دست آورید.

۲ ـ معادلات زیر را حل کنید.

الف : $۲y' - \frac{۳}{x} = \frac{e^{-y}}{x^۲}$

ب : $x(۴ydx + ۲xdy) + y^۳(۳ydx + ۵xdy) = ۰$

۳ ـ الف ـ k را طوری تعیین کنید که $y = x^k$ در معادله

$$y' = x^۳(y-x)^۲ + \frac{y}{x}$$

صدق کند.

ب ـ جواب عمومی معادله داده شده قسمت الف را به دست آورید.

۴ ـ جواب عمومی معادله همگن متناظر معادلهٔ زیر را به دست آورید و سپس فقط به فرم جواب خصوصی آن را بنویسید.

$$D^۲(D^۲+۴)^۳(D^۲+۲D+۱۰)^۲(D-۱)^۳y = x + ۴e^{-x}\sin ۲x$$
$$+x^۲e^x + ۳xe^{-x}\cos ۳x + x^۲ - \sin ۲x - e^{-x} + x\cos ۲x + ۱$$

۵ ـ اولاً تحقیق کنید $y = \sin x^۲$ یک جواب معادلهٔ $xy'' - y' + ۴x^۳y = ۰$ است. سپس جواب عمومی معادلهٔ $xy'' - y' + ۴x^۳y = ۲x^۳sec^۲x$ را به دست آورید.

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل (۷۰/۱۰/۲۷)

۱ ـ چهار جمله اول سری لژاندر تابع $f(x)$ را بنویسید هرگاه: (۶ امتیاز)

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & -۱ \le x < ۰ \\ x & ۰ \le x \le +۱ \end{cases}$$

۲ ـ سری جواب معادله زیر را حول $x = ۰$ بیابید. (۱۳ امتیاز)

$$x^۲y'' - xy' - (۲x^۲ - ۱)y = ۰$$

۳ ـ هرگاه $J_V(x)$ جواب معادله بسل مرتبه V باشد ثابت کنید: (۷ امتیاز)

$$\frac{d}{dx}[x^{-V}J_V(x)] = -x^{-V}J_{V+۱}(x)$$

۴ ـ معادله زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید. (۱۲ امتیاز)

$$ty'' + y' + ty = ۰$$

۵ ـ تبدیل معکوس هریک از توابع زیر را بیابید. (۱۵ امتیاز)

الف ـ $\mathcal{L}^{-۱}\{\frac{۲e^{-۲s}}{s^۲-۴}\}$ ب ـ $\mathcal{L}^{-۱}\{\frac{۱}{s}\cot^{-۱}(s)\}$

ج ـ $\mathcal{L}^{-۱}\{\ln\frac{s^۲-۲۵}{s^۲}\}$

۶ ـ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید: (۷ امتیاز)

$$y' + ۳y + \int_۰^t y(\lambda)\cos(t-\lambda)d\lambda = \begin{cases} ۱ & ۰ < t < ۱ \\ t & ۱ \le t \end{cases}$$

۷ ـ مقدار انتگرال زیر را به دست آورید. (۷ امتیاز)

$$\int_۰^{+\infty} e^{-۳t}t[\int_۰^t \frac{۱-\cos\lambda}{\lambda^۲}d\lambda]$$

در حل مسائل فوق از روابط زیر می‌توانید استفاده نمایید.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x) \quad n \geq 1$$

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n \quad (k \in R)$$

امتحان پایان ترم معادلات (ترم اول ۷۲_۷۱)

۱ ـ جواب معادله زیر را در نقطه $x = 0$ به دست آورید.

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \frac{3}{4}y = 0$$

۲ ـ الف ـ با استفاده از فرمول رُدریگس $P_0(x)$، $P_1(x)$، $P_2(x)$، $P_3(x)$ و $P_4(x)$ را محاسبه نمایید.

ب ـ مطلوبست محاسبهٔ انتگرال $\int_{-1}^{1} x^4 P_4(x)dx$

۳ ـ الف ـ اگر $J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2n+\nu}$ نشان دهید.

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

ب ـ اگر $\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$ فرمولهای زیر را نتیجه بگیرید.

$$a: \frac{\nu}{x}J_\nu(x) - J'_\nu(x) = J_{\nu+1}(x)$$

$$b: \frac{\nu}{x}J_\nu + J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x)$$

$$c: \frac{d}{dx}[xJ_\nu(x)J_{\nu+1}(x)] = x(J_\nu^2(x) - J_{\nu+1}^2(x))$$

$$d: \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[J_\nu^2(x) + J_{\nu+1}^2(x)] = \frac{\nu}{x}J_\nu^2(x) - \frac{\nu+1}{x}J_{\nu+1}^2(x)$$

۴ ـ الف ـ اگر $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ و $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ نشان دهید.

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \int_0^t f(t-y)g(y)dy$$

ب ـ معادلهٔ زیر را حل کنید. $y'' + y' = \cos t + \int_0^t \cos(t-x)y(x)dx$ و $y(0) = y'(0) = 0$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل (تیرماه ۷۱)

۱ ـ چهار جمله اول بسط تابع زیر را برحسب تابع لژاندر بیان کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

۲ ـ اگر $y_1 = 1 - 2x + \frac{(2x)^2}{(2!)^2} + \cdots + (-1)^n \frac{(2x)^n}{(n!)^2} + \cdots$ یک جواب معادله $xy'' + y' + 2y = 0$ باشد جواب دوم آن را به دست آورید.

۳ ـ معادله زیر را با استفاده از تغییر متغیر داده شده حل کنید.

$$y'' + 2x^2 y = 0 \ , \quad y = x^{1/2}u \ , \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$$

۴ ـ الف ـ مطلوبست حل معادله زیر

$$y = e^t[1 + \int_0^t e^{-x} y(x)dx]$$

ب ـ مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}[te^{2t}\cos 2t \sin 2t]$

۵ ـ معادله زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$ty'' - (2+t)y' + 3y = t - 1 \quad y(0) = 0$$

۶ ـ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x'' - y' = \cos t & y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1 \\ x' + y'' = -\sin t & x(0) = 1 \ , \ x'(0) = 0 \end{cases}$$

امتحان معادلات و ریاضی کاربردی (۷۱/۵/۲۴)

۱ ـ الف ـ نشان دهید که اگر $R = \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM}$ و R فقط به مقدار xy بستگی داشته باشد. آنگاه معادله $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ دارای یک فاکتور انتگرال به صورت $M(x,y)$ است یک فرمول کلّی برای این فاکتور انتگرال بیابید.

ب ـ با استفاده از قسمت الف معادله زیر را حل کنید.

$$(3x + \frac{6}{y})dx + (\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x})dy = 0$$

۲ ـ مسیرهای قائم منحنی زیر را بیابید.

$$x^2 - 2ay + y^2 = 0$$

۳ ـ جواب معادله زیر را به دست آورید.

$$y'' = \frac{y'}{x} + \frac{y^2}{y'} \ , \quad y(2) = 0 \ , \quad y'(2) = 4$$

۴ ـ معادله کوشی زیر را حل کنید.

$$(x+1)^2 y''' - 12y' = 0$$

۵ ـ جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید.

$$y'' - 2y' \tan x - 10y = e^{-3x} Secx$$

امتحان میان‌ترم فشرده معادلات (شهریور ۷۲)

۱ ـ اگر $y_1 = 1 - 2x + \frac{(2x)^2}{(2!)^2} + \cdots + (-1)^n \frac{(2x)^n}{(n!)^2} + \cdots$ یک جواب معادلهٔ $xy'' + y' + 2y = 0$ باشد جواب دیگر آن را به دست آورید.

۲ ـ اگر $J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} (\frac{x}{2})^{2n+\nu}$ باشد.

الف ـ ثابت کنید $\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$

ب ـ اگر $\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$ باشد ثابت کنید

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

۳ ـ الف ـ فرض کنید $f(t)$ تابعی پیوسته به ازای $t \geq 0$ باشد و در شرایط قضیه وجودی تبدیل لاپلاس صدق کند و $f'(t)$ به ازای $t \geq 0$ پیوستهٔ قطعه‌ای باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}[f'(t)] = S\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

ب ـ با استفاده از تبدیل لاپلاس معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$y'' + 9y = \sin 2t \ , \ \ y(0) = 1 = y'(0)$$

۴ ـ مطلوبست محاسبهٔ

الف ـ $\mathcal{L}[te^{2t} \int_0^t \frac{1-\cos t}{t} dt]$

ب ـ $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+2s+5} \ln \frac{s}{s-1}]$

۵ ـ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 + 2x \\ y_2' = 8y_1 - 4y_2 + 1 \end{cases}$$

امتحان معادلات دیفرانسیل (۷۲/۴/۶)

۱ ـ الف ـ نقطه منفرد منظم معادله $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ را تعریف کنید.

ب ـ منفرد د منظم بدون نقطه $x = 0$ را برای معادله $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{2})y = 0$ مشخص کنید.

پ ـ یک جواب معادله بالا را به دست آورید.

۲ ـ الف ـ با استفاده از فرمول ردریگس و انتگرال جزء به جزء نشان دهید که

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad n \neq m$$

ب ـ مطلوبست محاسبه انتگرال $\int_{-1}^{1} xP_n(x)dx$

۳ ـ الف ـ اگر $J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} (\frac{x}{2})^{2n+\nu}$ ثابت کنید:

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = -x^{-\nu} j_{\nu+1}(x)$$

ب ـ نشان دهید که $y = xJ_1(x)$ جواب معادله زیر می‌باشد.

$$xy'' - y' - x^2 J_0'(x) = 0$$

۴ ـ الف ـ اگر $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ به ازای $s > a \geq 0$ وجود داشته باشد و اگر c یک ثابت مثبت باشد آنگاه

$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)] = e^{-cs}F(s) \ , \ \ s > a$$

می‌دانیم $u_c(t)$ تابع پله‌ای واحد می‌باشد.

ب ـ معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + y = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 & t \geq 1 \ , \ \ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

۵ ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt$ را به دست آورید

$$ty'' + 2y' + ty = 0 \quad y(0) = 1$$

آزمون پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل تاریخ ۷۳/۴/۱۵

۱. اگر $y_1 = 1 + x + \frac{1}{(2!)^2}x^2 + \frac{1}{(3!)^2}x^3 + \dots$ یک جواب معادله $xy'' + y' - y = 0$ باشد جواب دوم معادله را به‌دست آورده و جواب عمومی آن را بنویسید.

۲. اگر $P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k$ باشد عبارت $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$ را برحسب توابع $P_k(x)$ بنویسید.

۳. $f(t)$ را برای $0 \le t < \infty$ متناوب گویند هرگاه عدد مثبتی مانند T وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(t+T) = f(t)$. نشان دهید که

الف- $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{\int_0^T e^{-St} f(t)dt}{1-e^{-ST}}$

ب- با استفاده از قسمت الف تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید.

$$f(t) = t; \quad 0 \le t < 1, \quad f(t+1) = f(t)$$

۴. به‌کمک تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید.

$$ty'' + 2(t-1)y' + (t-2)y = 0; \quad y(0) = 1$$

۵. چنانچه $u_c(t) = \begin{cases} 0 & t<c \\ 1 & t>c \end{cases}$ باشد دستگاه زیر را نسبت به $y(t)$ حل کنید:

$$\begin{cases} y' + 2y + 6\int_0^t z(u)du = -2u_0(t) \\ y' + z' + z = 0 \end{cases} ; \quad z(0) = 6, y(0) = -5$$

آزمون پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل

۱. معادله $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y = 0$ که در آن P و Q و R سه چندجمله‌ای می‌باشد مفروض است.

الف: نقطه $x = 0$ چه موقع یک نقطه معمولی نامیده می‌شود، اگر $x = 0$ یک نقطه معمولی باشد. طریقه حل را بیان کنید.

ب: نقطهٔ $x = 0$ چه موقع یک نقطهٔ منفرد منظم می‌نامیم، اگر $x = 0$ یک نقطهٔ منفرد منظم باشد طریقهٔ حل را به‌طور کامل شرح دهید (در سه حالت) (۱۲ نمره)

۲. الف: با استفاده از فرمول ردریگس $P_2(x)$ را به‌دست آورید. (۴ نمره)

ب: به‌ازای مقادیر مختلف n انتگرال $\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$ را ارزیابی کنید. اگر $f(x) = 8x^4 + x$ باشد (۶ نمره)

۳. با استفاده از تغییر متغیر $u^2 = 4e^x$ فرم جدید معادله $y'' + (e^x - n^2)y = 0$ را تعیین کرده و سپس به‌ازای $n = \frac{1}{2}$ جواب عمومی معادله را بنویسید. (۸ نمره)

۴. الف: فرض کنید که

۱- $f(t)$ روی فاصلهٔ $0 \le t \le T$ پیوستهٔ قطعه‌ای باشد

۲- به‌ازای $t > T$ همرتبه نمایی e^{ct} باشد آنگاه نشان دهید تبدیل لاپلاس $f(t)$ به‌ازای $s > c$ وجود دارد (۵ نمره)

ب: $f(t)$ را به‌دست آورید اگر (۱۲ نمره)

$$\mathcal{L}[f(t)] = \ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s} + \frac{1}{s+1}\cot^{-1}(s+1) + \frac{s}{s^4+8s^2+16}$$

۵. الف: تعریف کانولوشن دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ را بنویسید. (۲ نمره)

ب: اگر $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ و $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ نشان دهید که (۵ نمره)

$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] =$ کانولوشن دو تابع $f(t)$ و $g(t)$

ج: معادله انتگرالی زیر را حل کنید (۶ نمره)

$$y'(t) + 2y + \int_0^t y(x)dx = 0 \qquad y(0) = 1$$

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل و ریاضی کاربردی نیمسال دوم (۷۳_۷۴)

۱ _ معادله $x^2y''+mxy'+ny=0$، $m,n\in R$ مفروض است کدام مطلب زیر درباره جوابهای این معادله صحیح است.

الف _ اگر $(m-1)^2=4n$، $y_1=x^p$, $y_2=x^p\cos(q\ln x)$ برای یک q,p حقیقی مشخص جوابهای مستقلی برای معادله هستند.

ب _ اگر $(m-1)^2-4n<0$، $y_1=x^p\cos(q\ln x)$ و $y_2=x^p\sin(q\ln x)$ جوابهای مستقلی برای معادله هستند. (برای یک q,p حقیقی)

ج _ اگر $(m-1)^2-4n\geq 0$، $y_1=x^{-p}$ و $y_2=x^{-p}\ln x$ برای یک p مثبت جوابهای مستقلی برای معادله هستند.

د _ اگر $(m-1)^2-4n\neq 0$ معادله دارای دو جواب مستقل $y_1=x^p$ و $y_2=x^p\ln x$ برای یک p حقیقی، می‌باشد.

۲ _ جواب عمومی معادله $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{x^2})dx+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{x})dy=0$ برابر است با

الف _ $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}+c=0$

ب _ $\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y}{x}+c=0$

ج _ $-\frac{y}{x}-\sqrt{x^2+y^2}+c=0$

د _ $\frac{y}{x}-\sqrt{x^2+y^2}+c=0$

۳ _ a را کدامیک از مقادیر زیر انتخاب کنیم تا معادله $xdx+aydy+x(xdy-ydx)=0$ دارای فاکتور انتگرالی به صورت تابعی از (x^2+y^2) باشد.

الف _ $a=\frac{1}{2}$ ب _ $a=-1$ ج _ $a=-\frac{1}{2}$ د _ $a=1$

۴ _ کدامیک از گزاره‌های زیر غلط است.

الف _ $y^n\frac{dy}{dx}+y^{n+1}g(x)-y^{n+2}f(x)=0$ یک معادله برنولی است. $(n\in N)$

ب _ $y-x(y')^n-(y')^{n+1}=0$, $(n\in N)$ معادله کلرو است اگر $n=1$ و معادله لاگرانژ است اگر $n=2$

ج _ $(1+x)^3y'''+(1+x)^2y''+(1+x)y'+y=1-x^2$ یک معادله اویلر یا کوشی است که با قرار دادن $z=\ln(1+x)$ به معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود.

د _ هیچکدام

۵ _ معادله $xy''-(x+k)y'+ky=0$ $(k\in N)$، که e^x در آن صدق می‌کند دارای جوابی به صورت زیر نیز می‌باشد.

الف _ $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}$

ب _ $1-x^2/2!+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^{k/2}\frac{x^k}{k!}$ اگر k زوج باشد.

$1-x^2/2!+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{(k-1)/2}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ اگر k فرد باشد.

ج _ $x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{k/2}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ اگر k زوج باشد.

$x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{(k-1)/2}\frac{x^k}{k!}$ اگر k فرد باشد.

د _ $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

۶ _ جواب خصوصی معادله $(D-1)^2(D+2)y=2\sinh x$ عبارت است از

الف _ $\frac{1}{4}x^2e^x-\frac{1}{6}e^{-x}$

ب _ $\frac{1}{6}x^2e^{-x}-\frac{1}{4}e^x$

ج _ $\frac{1}{6}x^2e^x-\frac{1}{4}e^{-x}$

د _ $\frac{1}{4}x^2e^{-x}-\frac{1}{6}e^x$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل (۷۴/۴/۱۴)

۱ ـ به کمک سریهای توانی یک جواب معادله زیر را به دست آورده و سپس فرم جواب عمومی آن را بنویسید.

$$4xy''+2y'+y=0$$

۲ ـ اگر $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(x+\frac{\pi n}{2})P_n(x)}{n^2+1}$ که در آن $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای لژاندر می‌باشد. آنگاه $\int_{-1}^{1}f(x)dx$ را محاسبه کنید.

۳ ـ تغییر متغیرهای $Z=\sqrt{x}$ و $y=x^{\frac{1}{2}}$ را در معادله

$$xy''+\frac{1}{2}y'+\frac{1}{4}y=0$$

اعمال نموده، نوع معادله حاصل و فرم جواب عمومی فوق را بنویسید.

۴ ـ با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید.

$$4ty''+2y'+y=0 \qquad y(0)=y'(0)=0$$

توجه: $\mathcal{L}(\sin\sqrt{t})=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{-1}{4s}}$

۵ ـ الف) نشان دهید $j_0(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}$

ب) مطلوبست محاسبه $\int_0^{\infty}j_0(t)dt$

توجه: $\mathcal{L}[j_0(t)]=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$

۶ ـ $y(t)$ را از دستگاه زیر به دست آورید.

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}=4x+t^2\\ \frac{dx}{dt}+x+\frac{dy}{dt}=0\end{cases}$$

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل تاریخ ۷۴/۹/۸

۱. الف: شرطی را به‌دست آورید که معادله غیرکامل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ دارای فاکتور انتگرالی برحسب تابعی از x باشد. (۳ نمره)

ب: معادله زیر را حل کنید. (۵ نمره)

$$(2x^2y+2y+5)dx+(2x^3+2x)dy=0$$

۲. با استفاده از تغییر متغیر $xy=t$ معادله زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$(xy^2+y)dx+(x+x^2y+x^3y^2)dy=0$$

۳. الف: مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های $x^3-3x^2y=C$ را که در آن C پارامتر است، به‌دست آورید. (۴ نمره)

ب: جواب عمومی معادله زیر را به‌دست آورید. (۴ نمره)

$$yy''+2y'^2=0$$

۴. اگر $y_1=x^{-\frac{1}{2}}\cos x$ یک جواب معادله همگن نظیر معادله زیر باشد جواب دوم معادله همگن آن را به‌دست آورده و سپس جواب عمومی معادله را بیابید. (۸ نمره)

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=3x^{-\frac{3}{2}}\sin x$$

۵. به یکی از دو سوال زیر پاسخ دهید. (هرکدام ۸ نمره)

الف: با استفاده از روش اپراتور معکوس معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=4x^2e^x$$

ب: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}2y_1'+y_1+y_2'=x\\ y_1'+y_2'=y_1+2\end{cases}$$

امتحان پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۷۴/۱۰/۲۰

۱. جواب عمومی معادله زیر را به‌کمک سری‌های توانی به‌دست آورید. (۱۰ نمره)

$$(1+x^2)y''+xy'-y=0$$

۲. اگر $y_1 = x - \frac{x^3}{2^2} + \frac{x^5}{2^4(2!)^2} - \frac{x^7}{2^6(3!)^2} + \dots$ یک جواب معادله $x^2y''-xy'+(x^2+1)y=0$ باشد جواب دوم آن را به‌دست آورید. (۱۰ نمره)

۳. نشان دهید معادله زیر با استفاده از تغییر متغیر داده شده به معادله بسل تبدیل می‌شود و سپس فرم جواب عمومی آن را بنویسید. (۱۰ نمره)

$$\frac{d(x^2y')}{dx}+x(x+1)y=0,\quad y=x^{-1}u,\quad t=2x^{\frac{1}{2}}$$

۴. معادله زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید. (۱۰ نمره)

$$ty''+2y'+ty=0 \quad y(0)=1$$

۵. الف) نشان دهید هرگاه $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ باشد آنگاه $\mathcal{L}[\int_0^t f(x)dx]=\frac{F(s)}{s}$ (۴ نمره)

ب) مطلوب است محاسبه $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+2}{5s^3+3s^2-2s}\right]$ (۶ نمره)

۶. الف) انتگرال تلفیقی (کانولوشن) دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ را تعریف کرده و بدن اثبات تبدیل لاپلاس $f(t)*g(t)$ را بیان کنید. (۳ نمره)

ب) تابع $y(t)$ در معادله $t\frac{d^2y}{dt^2}+\int_0^t e^{-u}y(t-u)du=0$ با شرط اولیه $y(0)=0$ و $y'(0)=1$ صدق می‌کند، نشان دهید $Y(s)=\frac{c}{s^2}(s+1)exp\left(\frac{-1}{s}\right)$ که در آن c مقداری ثابت است. (۵ نمره)

ج) $y(t)$ را به‌صورت یک سری توانی به‌دست آورده و پنج جمله اول آن را بنویسید. (۲ نمره)

امتحان پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۷۵/۳/۲۹

۱. معادله $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ که در آن P، Q و R سه چندجمله‌ای هستند مفروض است.

الف: نقطه $x=0$ چه موقع یک نقطه تحلیلی (عادی) نامیده می‌شود. اگر $x=0$ یک نقطه تحلیلی باشد، طریق حل آن را بیان کنید. (۲ نمره)

ب: نقطه $x=0$ چه موقع یک نقطه منفرد منظم (غیرعادی منظم) می‌نامیم. اگر $x=0$ یک نقطه منفرد منظم باشد طریق حل را به‌طور کامل شرح دهید (هر سه حالت) (۶ نمره)

ج: یک جواب معادله زیر را به‌کمک سری‌ها به‌دست آورده و سپس فقط فرم جواب دوم و عمومی آن را بنویسید. (۷ نمره)

$$x^2y''+x^2y'-2y=0$$

۲. الف: ثابت کنید $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{2}{2n+1} & n=m\end{cases}$ که در آن $P_n(x)$ و $P_m(x)$ چندجمله‌ای‌های لژاندر می‌باشند. (۷ نمره)

ب: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر (۳ نمره)

$$\int_{-1}^{1}x^2P_n(x)dx$$

۳. اگر $J_\alpha(t)=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\alpha+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\alpha}$

الف: نشان دهید $J_0'(t)=-J_1(t)$ (۳ نمره)

ب: مطلوب است محاسبه $\mathcal{L}[J_0(at)]$ (۳ نمره)

ج: نشان دهید $\mathcal{L}[J_1(t)]=\frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}$ (۳ نمره)

د: به‌کمک تبدیل لاپلاس معادله $ty''+y'+9ty=0$ را حل کنید. (۶ نمره)

۴. معادله انتگرالی زیر را حل کنید. (۱۲ نمره)

$$xy'' + \int_{0}^{x} [4y(t) + \sin t]\cos(x-t)dt = 0 \quad y(0) = y'(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

۵. دستگاه زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 2y + 4e^{t} \end{cases}$$

فرمول‌های مورد نیاز:

(الف) $\int \cos^{2n+1}\theta d\theta = \frac{1}{2n+1}\cos^{2n}\theta\sin\theta + \frac{2n}{2n+1}\int \cos^{2n-1}\theta d\theta$

ب) $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

ج) $P(\alpha) = \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \quad \alpha > 0$

آزمون میان ترم معادلات دیفرانسیل (تابستان ۷۵)

۱ ــ جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید.

$$4(x-2)^2 y' = (x+y-1)^2$$

۲ ــ نشان دهید معادله

$$y(x^2 - xy + y^2)dx - x(x^2 + xy + y^2)dy = 0$$

با شرط اولیه $y(1) = 1$ دارای جواب $x^2 - y^2 = xy\ln(xy)$ است.

۳ ــ معادله $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$ را حل کنید.

۴ ــ جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 6x\frac{dy}{dx} + 6y = x + 3x^{-2}$$

را به دست آورید.

۵ ــ با استفاده از عملگر D (اپراتور معکوس) معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^4y}{dx^4} - y = 2(\sin x)(\sinh x)$$

را حل کنید.

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل آبان‌ماه ۱۳۷۵

۱. مسیر قائم دسته منحنی‌های زیر را به‌دست آورید

$$y=\frac{c}{1+cx}$$

۲. معادله زیر را حل کنید

$$x^2y''-xy'-3y=x^2\ln x$$

۳. اگر $y_1=e^{2x}$ یک جواب معادله همگن نظیر معادله زیر باشد، جواب عمومی آن را به‌دست آورید.

$$(x+2)y''-(2x+5)y'+2y=(4x+6)e^{2x}$$

۴. نشان دهید که معادله دیفرانسیل زیر یک عامل انتگرال‌ساز (فاکتور انتگرال) به‌صورت x^my^n دارد، پس از یافتن m و n، معادله را حل کنید.

$$ydx+(x^2y-2x)dy=0$$

۵. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به‌کمک عملگرهای دیفرانسیلی (اپراتورها) به‌دست آورید.

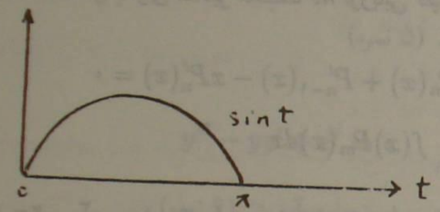
$$D(D-1)^2(D+2)y=2x-6e^x+10\sin x$$

۶. مطلوب است حل معادله دیفرانسیل زیر

$$4x-2yy'+y'^2x=0$$

امتحان پایان ترم درس معادلات دیفرانسیل تاریخ ۷۵/۱۰/۱۶

۱. نیم موج نشان داده شده در شکل را برحسب توابع پله‌ای واحد بیان کنید و تبدیل لاپلاس آن را بنویسید.



سپس معادله دیفرانسیل

$$y''+2y'+y=f(t)$$

را که در آن $f(t)$ تابع معرفی شده در قسمت اول می‌باشد با شرایط $y'(0)=1$ و $y(0)=0$ و استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

۲. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$ty''+2y'+ty=0,\quad y(0)=1,\quad y(\pi)=0$$

۳. تبدیل لاپلاس تابع زیر را پیدا کنید

$$f(t)=t^2e^{3t}\int_0^t e^{-\lambda}\cos(t-\lambda)d\lambda$$

۴. انتگرال‌های زیر را ارزیابی کنید

الف) $\int_0^1(-\ln x)^{-1/2}dx$ ب) $\int_0^\infty e^{-at}\frac{\sin bt}{t}dt$

۵. تبدیل معکوس تابع $\frac{3(s^2+1)}{s^6}e^{-2s}$ را به‌دست آورید.

۶. با استفاده از تغییر متغیر $u = 3e^{-x}$ معادله $y'' + (9e^{-2x} - 4)y = 0$ را حل کنید.

۷. اگر $P_0(x) = 1$، ابتدا با استفاده از فرمول زیر $P_2(x)$ را محاسبه نموده و سپس مقدار انتگرال داده شده را به‌ازای مقادیر مختلف m ارزیابی کنید.

$$nP_n(x) + P'_{n-1}(x) - xP'_n(x) = 0$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx$$

که در آن $f(x) = x^3 - 2x + 1$. $(P_n(1) = 1)$

۸. اگر جواب اول معادله زیر به‌صورت $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}x^{n+2}$ باشد. جواب دوم را پیدا کنید

$$x^2y'' - x(2x+3)y' + 4y = 0$$

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل (دانشگاه صنعتی امیر کبیر) ۷۶/۱/۲۷

۱ ـ معادله دیفرانسیل مسیر قائم $y^2 = 4c(x + c)$ را به دست آورده و پس از مقایسه آن با معادله دیفرانسیل مسیر اصلی مسیر قائم را تعیین کنید. (۵ نمره)

۲ ـ معادله زیر را حل کنید. (۵ نمره)

$$y'^2 - yy' + e^x = 0$$

۳ ـ جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید. (۶ نمره)

$$xy'' + y' = y'^2$$

۴ ـ الف ـ جواب عمومی معادله همگن نظیر معادله زیر را به دست آورده و سپس فقط فرم جواب خصوصی معادله را بنویسید. (۵ نمره)

$$D(D^2+2D+2)(D^2-2D+2)^3y = x^2+e^{-x}(x+\sin x)+e^x(1+\cos x)-1$$

ب ـ با استفاده از روش اپراتور معکوس جواب خصوصی معادله زیر را به دست آورید. (۴ نمره)

$$(D-2)^2(D+1)y = xe^{2x}$$

۵ ـ جواب عمومی معادله $(x^2 + 2)y'' + 4xy' + 2y = \sin x$ را بیابید. (۶ نمره)

۶ ـ با استفاده از تغییر متغیر $y = u(x)v(x)$ نشان دهید که معادله $y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$ به یک معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل می‌گردد، اگر عدد ثابت $= g(x) - \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{4}f^2(x)$ باشد. سپس معادله زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$y'' - 2y'\tan x - 10y = e^{-3x}\tan x$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل (دانشگاه صنعتی امیرکبیر) ۷۶/۳/۲۰

۱ ـ دستگاه معادلات زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$\begin{cases} y'_1 + y'_2 = 2\sin\ ht \\ y'_2 + y'_3 = e^t \\ y'_3 + y'_1 = 2e^t + e^{-t} \end{cases} \qquad y_1(0) = y_2(0) = 1 \ , \ y_3(0) = 0$$

۲ ـ الف ـ سه جمله اول بسط تابع زیر را بر حسب توابع لژاندر بیان کنید. (۶ نمره)

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & 0 < x \leq 1 \\ 3 & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

ب ـ با استفاده از تغییر متغیر $z = x^2$ و $y = x^{1/2}u$ معادله $y'' + 4x^2y = 0$ را حل کنید. (۶ نمره)

۳ ـ نشان دهید $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم معادله زیر است.

$$x^2y'' + x(3 - x^2)y' - 3y = 0$$

و اگر $y_1 = x(3 + \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{3}{2^7}x^4 + \cdots)$ جواب دوم معادله را پیدا کنید. (۱۰ نمره)

۴ ـ الف ـ مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

$$I = \int_0^\infty e^{-3t}t(\sin^2 t)\Big[\mathcal{L}^{-1}\ln\frac{s}{s-1}\Big]dt$$

ب ـ تبدیل معکوس تابع $F(s) = e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$ را حساب کنید. (۴ نمره)

۵ ـ با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادله زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} - y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 5$$

۶ ـ اگر $\mathcal{L}[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ باشد، با استفاده از رابطه $J'_0(t) = -J_1(t)$ و $J_0(0) = 1$ نشان دهید که (۸ نمره)

$$\int_0^t \sin(t-\lambda)J_0(\lambda)d\lambda = tJ_1(t)$$

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل (۷۶/۸/۱۴)

۱ ـ معادله زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$y'^2 - 3yy' - 3x = 0$$

۲ ـ جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید. (۷ نمره)

$$yy'' - y'^2 = y^2\ln y$$

۳ ـ به کمک روش عملگرهای معکوس معادله زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$y'' - y = x\sin x + (1 + x^2)e^x$$

۴ ـ جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید. (۷ نمره)

$$y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x\sin x}$$

۵ ـ معادله زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

۶ ـ الف ـ ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن که معادله

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

دارای فاکتور انتگرال به فرم $\mu = \mu(x^2 - y^2)$ باشد، آن است که عبارت زیر تابعی از $(x^2 - y^2)$ باشد. (۳ نمره)

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{2xN + 2yM}$$

ب ـ معادله زیر را حل کنید. (۴ نمره)

$$(x^2 - y^2 - y)dx - (x^2 - y^2 - x)dy = 0$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل (۷۶/۱۰/۱۶)

۱ ـ برحسب مقادیر مختلف n، $\int_{-۱}^{۱}(x^۲+x)P_n dx$ را ارزیابی کنید.

توجه:
$$P_{n+۱}(x)=\frac{۲n+۱}{n+۱}xP_n(x)-\frac{n}{n+۱}P_{n-۱}(x)$$

۲ ـ یک جواب معادله زیر $y_۱=x$ است، جواب مستقل دیگر آنرا به کمک سریها بیابید.

$$(x^۲-x)y''+xy'-y=۰$$

۳ ـ با استفاده از تغییر متغیر $z=۳x^۲$ و $y=xu$ معادله زیر را حل کنید.

$$x^۲y''-xy'+(۳۶x^۴-۱۵)y=۰$$

۴ ـ عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف) $\mathcal{L}(t\, cht \int_۰^t \frac{e^{۳r}-e^r}{r}dr)$ ب) $\mathcal{L}^{-۱}\left[\frac{(s+۱)e^{\frac{-۲\pi}{\sqrt{۳}}s}}{s^۲+s+۱}\right]$

۵ ـ معادله زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید.

$$ty''-(۲+t)y'+۳y=t-۱ \quad y(۰)=۰$$

۶ ـ دستگاه زیر را با هر روشی که می‌خواهید حل کنید.

$$\begin{cases} y_۱''(t)+y_۲''(t)-y_۲'(t)=۶۶ \\ y_۱''(t)+۳y_۲(t)=۹t^۲-۲ \end{cases}$$
$$y_۱(۰)=y_۲(۰)=y_۱'(۰)=۰ \quad y_۲'(۰)=-۲$$

امتحان میان ترم درس معادلات دیفرانسیل دانشگاه امیر کبیر (۷۷/۲/۱)

۱ ـ با استفاده از تغییر متغیر مناسب، معادله زیر را به معادله برنولی تبدیل کرده و سپس آن را حل کنید. (۷ نمره)

$$۴x^۲yy'=۳x(۳y^۲+۲)+۲(۳y^۲+.۲)^۳$$

۲ ـ مسیرهای قائم دسته منحنی زیر را به دست آورید. (۷ نمره)

$$r=c(\sec\theta+\tan\theta)$$

۳ ـ جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید. (۷ نمره)

$$xy''-y'=x\sin\frac{y'}{x}$$

۴ ـ با استفاده از تغییر متغیر $y=-xInt$، معادله زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$x^۳y''+۲x^۲=(xy'-y)^۲$$

۵ ـ معادله زیر را با استفاده از روش اپراتورهای معکوس حل کنید. (۷ نمره)

$$(D^۲+۲D+۲)y=e^x\cos x+x^۲$$

۶ ـ جواب عمومی معادله زیر را بنویسید. (۷ نمره)

$$(x+۱)y''-(۳x+۴)y'+۳y=(۳x+۲)e^{۳x}$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل دانشگاه امیرکبیر (۷۷/۳/۱)

۱ ـ نشان دهید $x=0$ یک نقطه منفرد منظم برای معادله دیفرانسیل زیر می‌باشد و سپس معادله زیر را حل کنید. (۱۰ نمره)

$$x^2y''-x^2y'+(x^2-2)y=0$$

۲ ـ با استفاده از رابطهٔ بازگشتی زیر

$$P'_{n+1}(x)=xP'_n(x)+(n+1)P_n(x)\qquad n\ge 0\ ,\ \ P_n(1)=1$$

و با فرض $f(x)=2x^4+x-1$. انتگرال زیر را ارزیابی کنید. (۱۰ نمره)

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$

۳ ـ مطلوبست محاسبه

الف. $\int x^4 J_1(x)dx$ (۵ نمره)

ب. $\mathcal{L}\{[t]\}$ (۵ نمره)

۴ ـ با استفاده از تبدیل لاپلاس، لاپلاس تابع $J_0(t)$ را به دست آورید. (۸ نمره)

$$(J_0(0)=1)$$

۵ ـ الف. تبدیل لاپلاس تابع زیر را به دست آورید. (۷ نمره)

$$f(t)=e^{-2t}\sin^2 t+u_2(t)\cosh 2t$$

ب. معادله زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$y(t)=\sin t+\int_0^t \lambda\ \ y(t-\lambda)\mathcal{L}^{-1}\cot^{-1}s\ \ d\lambda$$

۶ ـ دستگاه معادلات زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$\begin{cases} x''+y''-y'=6 & x(0)=x'(0)=y(0)=0\\ x''+3y=9t^2-2 & y'(0)=-2\end{cases}$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل ۷۷/۱۱/۱۰ مدت ۱۲۰ دقیقه

۱ـ الف: آیا تابع زیر را می‌توان به صورت چندجمله‌ای لژاندر بسط داد (توضیح دهید).

$$f(x)=\begin{cases}1+x & -1<x<0\\ 1 & 0\le x<1\end{cases}$$

ب: با استفاده از فرمول بازگشتی داده شده زیر چهار جمله اول بسط تابع بالا را برحسب چندجمله‌ایها لژاندر، بیان کنید. (۷ نمره)

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$$

۲ـ با استفاده از روش سریها، معادله زیر را حل کنید. (۱۰ نمره)

$$x^2y''-x(x+1)y'+y=0$$

۳ـ با استفاده از تغییر متغیر $z=\frac{8}{3}x^{3/2}$ ، $y=x^{1/2}u$ معادله زیر را حل کنید. $y''+16xy=0$ (۱۰ نمره)

۴ـ مطلوبست محاسبه

$$(A)\quad \int_0^\infty e^{-2t}\frac{\sin t\cosh t}{t}dt$$

$$(B)\quad \mathcal{L}[\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)d\theta]$$

(A ۵ نمره و B ۳ نمره)

۵ـ مطلوبست محاسبه

$$(A)\quad \mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)^2}]$$

$$(B)\quad \mathcal{L}^{-1}[e^{-2s}\ln\frac{s}{s-1}]$$

(A ۵ نمره و B ۵ نمره)

۶ـ الف: به کمک تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید. (۹ نمره)

$$t\frac{dy^2}{dt^2}+(3t-1)\frac{dy}{dt}-(4t+9)y=0\qquad y(0)=0$$

ب: معادله زیر را حل کنید. (۶ نمره)

$$\int_0^t y(\lambda)y(t-\lambda)d\lambda=16\sin 4t$$

توجه: $\mathcal{L}[J_0(at)]=\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل ۷۸/۲/۲۰ مدت: ۱۰۰ دقیقه

۱ـ فاکتور انتگرالی برای معادله زیر بدست آورده سپس آنرا حل کنید. (۸ نمره)

$$3ydx - 2xdy + \frac{x^2}{y}(10ydx - 4xdy) = 0$$

۲ـ جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید. (۸ نمره)

$$y'\sin y = \cos y(1 - x\cos y)$$

۳ـ با استفاده از روش تغییر پارامتر معادله زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$y''x\ln x - y' = \ln^2 x$$

۴ـ الف: با استفاده از تغییر متغیر $y = u(x)v(x)$ نشان دهید که معادله

$$(D^2 + p(x)D + q(x))y = f(x)$$

به معادله خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود اگر (۴ نمره)

$$q(x) - \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x) = \text{عدد ثابت}$$

ب: معادله زیر را با استفاده از قسمت قبل حل کنید. (۴ نمره)

$$y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = e^{1/2(x^2+2x)}$$

۵ـ جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید. (۸ نمره)

$$\{(3x+2)^2D^2 + 3(3x+2)D - 36\}y = 3x^2 + 4x + 1$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل ۷۸/۴/۱۴ مدت: ۱۲۰ دقیقه

۱ـ به کمک سری توانی معادله زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$y'' + x^2y' + 2xy = 0 \qquad y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0$$

۲ـ نقاط عادی (معمولی) و غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل زیر را بیابید. سپس جواب متناظر با ریشه کوچکتر معادله شاخصی را بدست آورید. (۱۰ نمره)

$$2x^2(1-x)y'' - x(1+7x)y' + y = 0$$

۳ـ الف: اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nP_n(x)$، $-1 < x < 1$، که در آن $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای لژاندر است نشان دهید. (۴ نمره) $c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} P_n(x)f(x)dx$

ب: چهار جمله اول بسط تابع زیر را برحسب چندجمله‌ای لژاندر بنویسید. (۳ نمره)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ -x & -1 < x < 0 \end{cases}$$

۴ـ الف: مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}[\frac{\sin^2 t}{t}]$ (۵ نمره)

ب: نشان دهید که $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt = \frac{1}{4}\ln 5$ (۲ نمره)

ج: مطلوبست محاسبه $\mathcal{L} - 1[\frac{(s+1)e^{-\pi s}}{(s^2+2s+2)^2}]$ (۵ نمره)

۵ـ الف: اگر $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ باشد، نشان دهید $\mathcal{L}[f(\frac{t}{a})] = aF(as)$ (۴ نمره)

ب: اگر $g(t) = \int_t^{2t} e^u f(u)du$ باشد، تبدیل لاپلاس تابع g را برحسب تبدیل لاپلاس تابع f بیان کنید. (۷ نمره)

۶ـ الف: به کمک تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + (1-2t)\frac{dy}{dt} - 2y = 0 \quad y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 2$$

ب: معادله انتگرالی زیر را حل کنید. (۵ نمره)

$$\int_0^t \frac{y(\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}d\lambda = 1 + t + t^2$$

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل دانشگاه امیرکبیر ۷۸/۹/۱۰

۱ـ مسیر قائم دسته منحنی زیر را به دست آورید. (۷ نمره)

$$y^2 = 2x^2(1 - cx)$$

۲ـ الف. نشان دهید که معادله

$$\frac{dy}{dx} = x^{\alpha-1} f\Big(\frac{y}{x^{\alpha}}\Big)$$

با استفاده از تغییر متغیر $y = x^{\alpha} z$ تبدیل به معادله‌ای می‌شود که در آن متغیرها تفکیک‌پذیرند این معادله را در حالت کلی حل کنید و نشان دهید. (۳ نمره)

$$x = c\exp\Big(\int \frac{dz}{f(z) - \alpha z}\Big)$$

ب. با استفاده از روش فوق معادله زیر را حل کنید. (۴ نمره)

$$y' = 2x^{-2} - 3y^2$$

۳ـ با استفاده از تغییر متغیرهای $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ معادله زیر را حل کنید. (۶ نمره)

$$x(xdy - ydx) = \sqrt{x^2 + y^2}dy$$

۴ـ معادله زیر را حل کنید. (۶ نمره)

$$xy'' - y' = x\sin\frac{y'}{x}$$

۵ـ جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید (جواب خصوصی آنرا با استفاده از روش اپراتور معکوس تعیین کنید.) (۷ نمره)

$$(D^2 + 4)(D - 3)y = (4x + 7)\sin x\cos x + xe^{3x}$$

۶ـ معادله زیر را حل کنید

$$(x^3D^3 + 2xD - 2)y = x^2 lnx + 3x$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل دانشگاه امیرکبیر ۷۸/۱۰/۲۱

۱ـ جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید. (۱۰ نمره)

$$x^2y'' - x(1 + x)y' + y = 0$$

۲ـ با استفاده از تغییر متغیر داده شده معادله زیر را حل کنید. (۱۰ نمره)

$$y'' + xy = 0 \qquad y = u\sqrt{x} \qquad \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$$

۳ـ الف) به کمک سری توانی معادله زیر را حل کنید. (۶ نمره)

$$(1 - x^2)y'' - 2xy + \frac{3}{4}y = 0$$

ب) چهار جمله اول بسط تابع زیر را بر حسب توابع لژاندر بیان کنید. (۴ نمره)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x < 0 \\ 2x + 1 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

۴ـ تبدیل لاپلاس وارونهای زیر را حساب کنید.

الف) $L^{-1}\Big[\dfrac{e^{-s}(1 - e^{-s})}{s(s^2 + 1)}\Big]$ (۵ نمره)

ب) $L^{-1}\Big[\dfrac{s}{s^2 + 1}\ln\Big(\dfrac{s}{s - 1}\Big)\Big]$ (۵ نمره)

۵ـ الف) اگر $f(t)$ متناوب با دوره تناوب p باشد، (یعنی $f(t + p) = f(t)$) نشان دهید (۵ نمره)

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)dt$$

ب) تبدیل لاپلاس $L\Big[|\sin(kt)|\Big]$ را حساب کنید. (۵ نمره)

۶ـ دستگاه زیر را حل کنید. (۱۰ نمره)

$$\begin{cases} y_1' + y_2' = 2sinh(t) \\ y_2' + y_3' = e^t \\ y_3' + y_1' = 2e^t + e^{-t} \end{cases} \qquad y_1(0) = 1 = y_2(0), y_3(0) = 0$$

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل دانشگاه امیرکبیر (۷۹/۲/۶)

۱. مسیرهای قائم بر دسته منحنیهای $x^3 - 3x^2y = c$ را بیابید.

۲. معادله زیر را حل کنید.

$$y'^2 + xy' - y + x = 0$$

۳. الف: با دیفرانسیل‌گیری از معادله

$$\int \frac{f(xy)+g(xy)}{f(xy)-g(xy)}\frac{d(xy)}{xy} + \ln\frac{x}{y} = c$$

نشان دهید تابع $\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ یک فاکتور انتگرال معادله زیر است.

$$yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$$

ب: با استفاده از قسمت قبل معادله زیر را حل کنید.

$$(x^2y^3 + xy^2 + y)dx - (x^3y^2 - x^2y + x)dx = 0$$

۴. با استفاده از روش اپراتور معکوس معادله زیر را حل کنید.

$$(D^3 - D^2 + 4D - 4)y = 64e^x \sin 2x$$

۵. جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید.

$$(1+2x)^2y'' - 6(1+2x)y' + 16y = 8(1+2x)^2$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل دانشگاه امیرکبیر (۷۹/۳/۲۴)

۱. با توجه به رابطه مولد $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$

(۳ نمره)

الف) نشان دهید

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

(۳ نمره)

ب) با مساوی قراردادن ضرایب t^n در قسمت قبل فرمول بازگشتی زیر را بدست آورید.

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

(۴ نمره)

ج) انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 + 1)P_n(x)dx$$

۲. یک جواب معادله زیر را حول نقطه $x = 0$ به دست آورید. این نقطه چه نوع نقطه‌ای است؟ سپس فقط فرم جواب دوم آنرا بنویسید. (۱۰ نمره)

$$x^2(1+x)y'' + x(x-4)y' + 4y = 0$$

۳. اگر

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+v+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}$$

(۶ نمره)

الف) فقط یکی از دو رابطه زیر را ثابت کنید.

$$\frac{d}{dx}(x^vJ_v(x)) = x^vJ_{v-1}(x) \quad , \quad \frac{d}{dx}(x^{-v}J_v(x)) = -x^{-v}J_{v+1}(x)$$

(۴ نمره)

ب) انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int x^2 J_0(x)dx$$

۴. الف) لاپلاس وارون $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right]$ را حساب کنید. (۳ نمره)

ب) انتگرال زیر را محاسبه کنید. (۴ نمره)

$$\int_0^\infty e^{-2t}\Big(\int_0^t \frac{e^{-2\lambda}-e^{-4\lambda}}{\lambda}d\lambda\Big)dt$$

ج) معادله انتگرال زیر را حل کنید. (۵ نمره)

$$y(t)=e^{-t}-2\int_0^t \cos(t-x)y(x)dx$$

۵.به کمک تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید. (۱۰ نمره)

$$\frac{d^2y}{dt^2}-t\frac{dy}{dt}+y=1 \qquad y(0)=1, y'(0)=2$$

۶. دستگاه زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$\begin{cases} y_1''-y_2'=\cos t \\ y_1'+y_2''=-\sin t \end{cases}$$

$$y_1(0)=y_2'(0)=1, y_1'(0)=y_2(0)=0$$

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل دانشگاه امیرکبیر(۷۹/۹/۲)

۱. معادله زیر را حل کنید.

$$(x+y-1)^2dy-2(y+2)^2dx=0$$

۲. جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$y=-xy'+y'^2$$

۳. فاکتور انتگرالی برای معادله زیر بیابید، سپس آنرا حل کنید.

$$(1+y^2)dx-(\tan^{-1}y-x)dy=0$$

۴. جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید.

$$y''+4y=4sec2x$$

۵. معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{d}{dy}\Big(\frac{dx}{dy}-x\Big)=3(y^2+2y)e^y$$

۶. با استفاده از روش اپراتور معکوس جواب خصوصی معادله زیر را تعیین کنید و سپس جواب عمومی آنرا بنویسید.

$$(D^3+4D)y=4\sin 2x$$

۷. دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} Dx+Dy+3x=\sin t \\ Dx+y-x=\cos t \end{cases}$$

امتحان نیم ترم معادلات دیفرانسیل دانشگاه امیرکبیر(۸۰/۲/۱۰)

۱ـ مسیر قائم دسته منحنی $y = c(x+b)e^x$ را بیابید. b یک عدد ثابت و c پارامتر می‌باشد. (۵ نمره)

۲ـ معادله زیر را حل کنید. (۵ نمره)

$$y' - (x-y+1)^2 = x-y$$

۳ـ فاکتور انتگرالی برای معادله زیر به دست آورید و سپس آنرا حل کنید. (۸ نمره)

$$y(x^2+\tan\frac{y}{x})dx + x(x^2-\tan\frac{y}{x})dy = 0$$

۴ـ اگر $y_1 = \tan x$ یک جواب معادله همگن نظیر معادله

$$y'' - y'\tan x - y\sec^2 x = 2\cos x$$

باشد، جواب عمومی آن را بیابید. (۷ نمره)

۵ـ جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید. (۸ نمره)

$$(x^2D^2 + xD + 1)y = \tan(\ln x)$$

۶ـ دستگاه زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$\begin{cases} (D^2+D+1)x + (D^2+1)y = e^t \\ (D^2+D)x + D^2y = e^{-t} \end{cases}$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل دانشگاه امیرکبیر(۸۰/۴/۱۱)

۱ـ الف) نشان دهید تغییر متغیر $y = x^{-\frac{1}{2}}u$ معادله $x^2y'' + xy' + (x^2-\alpha^2)y = 0$ را به معادله $u'' + f(x)u = 0$ تبدیل می‌کند. (۸ نمره)

ب) با استفاده از قسمت قبل نشان دهید (۶ نمره)

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

راهنمایی:

$$J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\alpha+1)}(\frac{x}{2})^{2n+\alpha}$$

۲ـ به کمک سری توانی در همسایگی $x = 0$ یک جواب معادله زیر را به دست آورید و سپس فقط فرم جواب دوم و جواب عمومی آنرا بنویسید. (۱۲ نمره)

$$xy'' + 3y' - x^2y = 0$$

۳ـ الف: تابع زیر را برحسب تابع پله‌ای واحد بیان نمایید و سپس تبدیل لاپلاس آنرا به دست آورید. (۵ نمره)

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & t < \pi \\ t & t > \pi \end{cases}$$

ب: تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید. (۵ نمره)

$$g(t) = t^2e^{2t}\int_0^t e^{-t}\frac{\sin 5t}{t}dt$$

۴ـ مطلوب است محاسبه

الف: $\mathcal{L}^{-1}[\ln\frac{s+\sqrt{s^2+1}}{2s}]$ (۶ نمره)

ب: $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^4+1}]$ (۵ نمره)

۵ـ معادله انتگرال زیر را حل کنید. (۶ نمره)

$$\int^t \quad y(\lambda)$$

۶ـ y را از دستگاه زیر بیابید. (۷ نمره)

$$\begin{cases} y' + 2y + 6\int_0^t x(t)dt = -2u_0(t) \\ y' + x' + x = 0 \end{cases} \qquad y(0) = -5,\ x(0) = 6$$

امتحان نیم‌ترم معادلات دیفرانسیل ۸۰/۸/۳۰ مدت ۱۲۰ دقیقه

۱ـ مسیر قائم دسته منحنی $y^2 = \dfrac{x^3}{c-x}$ را بیابید.

۲ـ فاکتور انتگرالی برای معادله زیر به‌دست آورید و سپس آن را حل کنید.

$$4xydx + 2x^2dy + 3y^4dx + 5xy^3dy = 0$$

۳ـ معادله زیر را حل کنید.

$$(x^2 + x)y'^2 + (x^2 + x - 2xy - y)y' + y^2 - xy = 0$$

۴ـ اگر $y_1 = \sin x$ یک جواب معادله همگن نظیر معادله زیر باشد، جواب عمومی آن را بیابید.

$$y'' - 2y'\tan x + 3y = \sec x$$

۵ـ معادله زیر را حل کنید.

$$(1 + 2x)^2y'' - 6(1 + 2x)y' + 16y = 8(1 + 2x)^2$$

۶ـ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} (D - 3)x + 2(D + 2)y = 2\sin t \\ 2(D + 1)x + (D - 1)y = \cos t \end{cases}$$

امتحان پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۸۰/۱۰/۲۴ مدت ۱۲۰ دقیقه

۱ـ اگر معادلات زیر

$$(۱-x^۲)y''-۲xy'+۱۲y=۰ \quad , \quad (۱-x^۲)y''-۲xy'+۲۰y=۰$$

به‌ترتیب دارای جوابهای $y_۱$ و $y_۲$ باشند مطلوب است محاسبه

الف ـ $\int_{-۱}^{۱} y_۱ y_۲ dx$ (۸ نمره)

ب ـ $\int_{-۱}^{۱} y_۱^۲ dx$ (۷ نمره)

۲ـ در معادله $۲(x-۳)^۲xy''+۳xy'+(x-۳)y=۰$ نقاط معمولی و منفرد منظم و منفرد نامنظم را مشخص کنید، سپس ریشه‌های معادله شاخصی را تعیین و جواب اول معادله را به‌دست آورید. فقط فرم جواب دوم آن را بنویسید. (۱۲ نمره)

۳ـ معادله زیر را حل کنید. (۶ نمره)

$$f(t)=te^{-t}+\int_۰^t \lambda f(t-\lambda)e^{-\lambda}d\lambda$$

۴ـ مطلوب است محاسبه

الف ـ $\mathcal{L}^{-۱}\left[\frac{e^{-۲s}}{s^۲+۲s+۵}\right]$ (۵ نمره)

ب ـ $\mathcal{L}^{-۱}\left[\frac{s}{(s^۲+۱)^۲}\cot^{-۱}(s+۳)\right]$ (۶ نمره)

ج ـ $\mathcal{L}\left[te^{-۲t}\int_۰^t t^۲e^{-t}\frac{۱-\cos t}{t}dt\right]$ (۷ نمره)

۵ـ معادله زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید. (۹ نمره)

$$t\frac{d^۲y}{dt^۲}-(۲+t)\frac{dy}{dt}+۳y=t-۱ \quad , \quad y(۰)=۰$$

امتحان نیم‌ترم معادلات دیفرانسیل ۸۱/۲/۴ مدت ۱۲۰ دقیقه

۱ـ با استفاده از تغییر متغیر $u=\sin x$ و $v=\sin y$ معادله زیر را حل کنید. (۶ نمره)

$$(\cos^۲ y)(y')^۲+y'\sin x\cos y-(\sin y)(\cos^۲ x)=۰$$

۲ـ فاکتور انتگرالی برای معادله زیر به‌دست آورید و سپس آنرا حل کنید. (۹ نمره)

$$y(e^{\frac{x}{y}}+\sin xy+xy\cos xy)dx=[(x-y)e^{\frac{x}{y}}-x^۲y\cos xy]dy$$

۳ـ معادله زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$(x^۲D^۲-xD+۴)y=\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)$$

۴ـ جواب عمومی معادله زیر را بیابید. (۹ نمره)

$$y''+۲y'+۵y=e^{-x}\sec ۲x$$

۵ـ دستگاه زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+۳x=\sin t\\ \frac{dx}{dt}+y-x=\cos t\end{cases}$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل ۸۱/۴/۳ مدت ۱۲۰ دقیقه

۱ـ اگر

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^{n+\frac{2}{3}}}{9^n n!(n+2)!} \qquad 0<x$$

یک جواب معادله $9x^2y''+3xy'+2(x-4)y=0$ باشد جواب دوم آن را پیدا کنید.

(۱۰ نمره)

۲ـ الف ـ انتگرال زیر را محاسبه کنید. (۷ نمره)

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-at}\cos bt-e^{-pt}\cos qt}{t}dt \qquad 0<a,p$$

ب ـ معادله انتگرال زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$y(t)=\sin 5t-6\int_0^t y(t-\lambda)\cos 5\lambda\, d\lambda$$

۳ـ الف ـ با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب نشان دهید که معادله زیر به یک معادله لژاندر تبدیل می‌شود. (۵ نمره)

$$\sin^2\theta\frac{d^2y}{d\theta^2}+\cos\theta\sin\theta\frac{dy}{d\theta}+[n(n+1)\sin^2\theta]y=0$$

ب ـ انتگرال زیر را محاسبه کنید. (۴ نمره)

$$\int_0^{\pi}[P_5(\cos\theta)]^2\sin\theta\, d\theta$$

۴ـ اگر

$$Y_\nu(x)=\frac{\cos\nu\pi J_\nu-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}\ ,\quad \frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)]=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\ ,$$

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)]=x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

نشان دهید (۸ نمره)

$$\frac{d}{dx}[x^\nu Y_\nu(x)]=x^\nu Y_{\nu-1}(x)$$

توجه: $\sin\nu\pi=-\sin(\nu-1)\pi\ ,\quad \cos\nu\pi=-\cos(\nu-1)\pi$

۵ـ الف ـ اگر $\mathcal{L}[\sin\sqrt{t}]=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{4s}}$، معادله $4ty''+2y'+y=0$ را حل کنید.

$y(0)=0$

(۱۰ نمره)

ب ـ با استفاده از قسمت (الف) مطلوب است محاسبه $\mathcal{L}\left[\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right]$ (۸ نمره)

امتحان نیم ترم معادلات دیفرانسیل ۸۱/۸/۲۹

۱ـ معادله زیر را حل کنید.

$$e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)dy = 0$$

۲ـ جواب عمومی و غیرعادی معادله زیر را تعیین کنید.

$$\frac{(y - xy')\sqrt{1 + y'^2}}{y'} = 2$$

۳ـ معادله زیر را حل کنید.

$$1 + yy'' + y'^2 = 0$$

۴ـ جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$(D^3 + 4D)y = 4 \cot 2x$$

۵ـ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y_1'' + y_2' + 3y_1 = e^{-x} \\ y_2'' - 4y_1' + 3y_2 = \sin 2x \end{cases}$$

۶ـ با استفاده از تغییر متغیر $y = uv$ نشان دهید که معادله دیفرانسیل

$$y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$$

به یک معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل می شود اگر

$$f_2(x) - \frac{1}{2} f_1'(x) - \frac{1}{4} f_1^2(x) = A$$

۷ـ معادله زیر را حل کنید.

$$y'' - 2y' \tan x + 15y = x \frac{\sin 4x}{\cos x}$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل ۸۱/۱۰/۲۶

۱ـ به کمک سری توانی در همسایگی $x = 0$ معادله زیر را حل کنید. (۱۲ نمره)

$$4x^2y'' + 4xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

۲ـ الف) انتگرال زیر را محاسبه کنید. (۵ نمره)

$$\int_{-1}^{1} (x^3 - 2)P_4(x)dx$$

ب) اگر $J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n + \nu + 1)} (\frac{x}{2})^{2n+\nu}$
تساوی زیر را ثابت کنید. (۵ نمره)

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

ج) انتگرال زیر را محاسبه کنید. (۵ نمره)

$$\int_0^1 xJ_2(x)dx$$

۳ـ لاپلاس وارونهای زیر را حساب کنید.

الف) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s\sqrt{s+4}}]$ (۶ نمره) ب) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s^2}{(s^2+1)^2}]$

۴ـ به کمک تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید. (۱۰ نمره)

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + (1 - 2t)\frac{dy}{dt} - 2y = 0 \qquad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 2$$

۵ـ دستگاه زیر را حل کنید. (۱۰ نمره)

$$\begin{cases} 2x(t) - y(t) - y'(t) = 4(1 - e^{-t}) \\ 2x'(t) + y(t) = 2(1 + 3e^{-2t}) \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 0$$

امتحان نیم ترم معادلات دیفرانسیل ۸۲/۱/۳۱

۱ـ نشان دهید که $x^{\alpha}y^{\beta}$ یک فاکتور انتگرال معادله زیر است و سپس آن را حل کنید. (۷ نمره)

$$(5xy^2 - 4y\sin y)dx = (xy\cos y + 3x\sin y - 4x^2y)dy$$

۲ـ مسیر قائم بر دسته منحنی $x^2 + y^2 - 1 = 2cy$ را بیابید. (۶ نمره)

۳ـ معادله زیر را با شرایط اولیه داده شده حل کنید. (۶ نمره)

$$y'' + 2y - 2y^3 = 0 \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1$$

۴ـ معادله زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$4y' + y''^2 = 4xy''$$

۵ـ جواب عمومی معادله زیر را تعیین کنید. (۷ نمره)

$$x^2y'' + xy' + y = \tan ln|x|$$

۶ـ دستگاه زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} + 2y_1 + 4y_2 = 1 + 4x \\ \dfrac{dy_2}{dx} + y_1 - y_2 = \dfrac{3}{2}x^2 \end{cases}$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل ۸۲/۴/۲

۱ـ الف) نشان دهید که معادله لژاندر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت. (۴ نمره)

$$[(1 - x^2)y']' = -\nu(\nu + 1)y$$

ب) با استفاده از قسمت قبل یا هر روش دیگر نشان دهید که برای هر دو چندجمله‌ای لژاندر $P_n(x)$ و $P_m(x)$ که $n \neq m$ داریم. (۶ نمره)

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

۲ـ می‌دانیم که تابع

$$y_1 = 1 - \frac{1}{3^2}x^3 + \frac{1}{3^4(2!)^2}x^6 - \frac{1}{3^6(3!)^2}x^9 + \cdots$$

یک جواب معادله $xy'' + y' + x^2y = 0$ است. جواب دیگر آن را بیابید. (۱۲ نمره)

۳ـ لاپلاس و لاپلاس وارونهای زیر را حساب کنید.

الف) $\mathcal{L}[e^{3t}\cos 3t\cos 4t]$ (۵ نمره)

ب) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-1)^3(s^2+1)}\right]$ (۷ نمره)

۴ـ الف) اگر $J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}(\dfrac{x}{2})^{2n+\nu}$ نشان دهید

$J_0'(x) = -J_1(x)$ (۵ نمره)

ب) اگر $\mathcal{L}[J_0(\alpha t)] = \dfrac{1}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}}$ نشان دهید (۶ نمره)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{tJ_1(\alpha t)}{\alpha}$$

۵ـ معادله زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + (1 - 2t)\frac{dy}{dt} - 2y = 0 \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 2$$

۶ـ دستگاه زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x \end{cases} \quad x(0) = 8 \ , \ y(0) = 3$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل (نوبت دوم) ۸۲٫۶٫۳

۱ـ اگر $y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)x^{n+2}}{n!}$ یک جواب معادله

$$x^2y''-x(2x+3)y'+4y=0$$

باشد، جواب دوم آن را بیابید. (۱۰ نمره)

۲ـ الف) اگر $P_n(x)$ چند جمله‌ای لژاندر باشد، ثابت کنید: (۷ نمره)

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx=\frac{2}{2n+1}$$

ب) انتگرال $\int_0^{\pi}[P_6(\cos\lambda)]^2\sin\lambda d\lambda$ را محاسبه کنید. (۳ نمره)

۳ـ الف) اگر $J_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2n+\nu}$ نشان دهید (۵ نمره)

$$\frac{d}{dx}[x^{\nu}J_\nu(x)]=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

ب) اگر $[x^{\nu}J_\nu(x)]'=x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$ و $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ و $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ ثابت کنید.

$$\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)=J_{\nu+1}(x)+J_{\nu-1}(x)$$

سپس $J_{\frac{5}{2}}(x)$ را حساب کنید. (۵ نمره)

۴ـ ابتدا تابع

$$f(t)=\begin{cases}0 & 0\leqslant t\leqslant\pi\\ 3\sin & \pi\leqslant t\end{cases}$$

را برحسب تابع پله‌ای واحد بیان نمایید و سپس معادله زیر را حل کنید. (۱۰ نمره)

$$y'+y=f(t)\qquad y(0)=5$$

۵ـ لاپلاس و لاپلاس وارونهای زیر را حساب کنید.

الف) $\mathcal{L}[(te^{-t}\cos 2t)*(e^t\int_0^t\frac{\sin t}{t}dt)]$ (۶ نمره)

ب) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2k^3}{(s^2+k^2)^2}\right]$ (۶ نمره)

۶ـ دستگاه زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$\begin{cases}y_1''+10y_1-4y_2=0\\ -4y_1+y_2''+4y_2=0\end{cases}\quad y_1(0)=y_1'(0)=y_2(0)=0\ ,\ y_2'(0)=-1$$

فرمولهای مورد نیاز:

$$\int(\cos\theta)^{2n+1}d\theta=\frac{1}{2n+1}(\cos\theta)^{2n}\sin\theta+\frac{2n}{2n+1}\int(\cos\theta)^{2n-1}d\theta$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل ۸۲٫۱۰٫۲۴ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱ـ در معادله دیفرانسیل $x(x-1)^3y'' + (2x-2)y' + x(x+1)y = 0$ فقط نقاط معمولی، منفرد منظم، و منفرد نامنظم را مشخص کنید. (۵ نمره)

۲ـ اگر

$$y_1 = x - \frac{x^3}{2^2} + \frac{x^5}{2^4(2!)^2} - \frac{x^7}{2^6(3!)^2} + \dots$$

یک جواب معادله $x^2y'' - xy' + (x^2+1)y = 0$ باشد، جواب دوم آن را بیابید. (۱۰ نمره)

۳ـ معادله زیر را با استفاده از تغییر متغیر داده شده حل کنید. (۹ نمره)

$$\frac{d}{dx}(x^3y') - x(x+1)y = 0 \qquad y = x^{-1}u, t = 2x^{\frac{1}{2}}$$

۴ـ با استفده ازتبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید. (۹نمره)

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - ty = 0 \qquad y(0^+) = 1$$

۵ـ معادله زیر را حل کنید. (۷ نمره)

$$y'' - 2y' + 3y = \begin{cases} t & 0 < t < \pi \\ \sin t & \pi \leqslant t \end{cases}$$

۶ـ (الف) تبدیل لاپلاس تابع $\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}du$ را بیابید. (۵ نمره)

ب) لاپلاس وارون $\left[\frac{1}{(s-4)^2}\cot^{-1}(s-1)\right]$ $\mathcal{L}^{-1}$ را حساب کنید. (۵ نمره)

۷ـ دستگاه زیر را حل کنید. (۱۰ نمره)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + 6\int_0^t y(t)dt = -2 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 0 \end{cases} \qquad x(0) = -5, y(0) = 6$$

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۸۳٫۱٫۲۹ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱ـ معادله زیر را حل کنید.

$$2y'\cos(y) + \sin(y) = \frac{x^2}{\sin(y)}$$

۲ـ الف) با تغییر متغیر $z = x^my^n$ معادله زیر را به یک معادله جدائی‌پذیر تبدیل نمائید.

$$P(x^my^n)ydx + Q(x^my^n)xdy = 0$$

ب) سپس معادله زیر را حل کنید.

$$(2 + 4x^2\sqrt{y})ydy + x^3\sqrt{y}dy = 0$$

۳ـ معادله زیر را حل کنید.

$$(y')^3\cos^2(y) + 2\tan(y) - 2y'x = 0$$

۴ـ معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx} - y = 16e^{3/x}$$

الف) نشان دهید که $y_1(x) = e^{-1/x}$ یک جواب معادله **همگن** متناظر می‌باشد.

ب) جواب عمومی معادله همگن متناظر را بیابید.

ج) به کمک روش تغییر پارامترها جواب معادله غیرهمگن را بیابید.

۵ـ جواب عمومی معادله زیر را بیابید (از روش اپراتور D یا از روش اپراتور معکوس استفاده نمائید).

$$(D^3 - D^2)y = xe^x - e^x$$

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل نیمسال دوم ۸۳-۸۲ ۸۳/۳/۲۵ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱ـ معادله زیر را در نظر بگیرید

$$x^2y'' + (1+x^3)xy' - y = 0$$

الف) نقطه $x_0 = 0$ در معادله بالا از چه نوعی می‌باشد.

ب) یک جواب معادله فوق را در همسایگی $x_0 = 0$ به دست آورید. این سری در چه ناحیه‌ای جواب معادله می‌باشد (بازه اعتبار جواب).

ج) فرم جواب عمومی را بنویسید (لازم به جای‌گذاری و محاسبه ضرایب نمی‌باشد).

۲ـ با استفاده از تغییر متغیر $z = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$ و $y = x^{1/2}u$، معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + 2x^2y = 0$$

۳ـ با کمک تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - t\dfrac{dy}{dt} + y = 1 \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$$

۴ـ فرم کلی جواب معادله زیر را بدست آورید (a عددی حقیقی است) راهنمایی : از تبدیل لاپلاس استفاده کنید.

$$\begin{cases} y'' + 2ay' + a^2y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

۵ـ اگر $J_0(x)$ تابع بسل مرتبه صفر باشد و اگر تبدیل لاپلاس آن به صورت زیر در نظر گرفته شود.

$$\mathcal{L}\left(J_0(x)\right) = F(S)$$

آنگاه $F(S)$ را به دست آورید (می‌دانیم که $\int_0^\infty J_0(x)dx = 1$).

۶ـ الف) شعاع همگرائی جواب سری معادله $(x^2 - 3x + 2)y'' + (2x^2 + 3x)y' + x^3y = 0$ حول نقطه $x_0 = \frac{1}{2}$ چقدر می‌باشد.

ب) در رابطه $\Gamma(\frac{\alpha}{m} + n + 1) = A\alpha(\alpha + m)(\alpha + 2m)\dots(\alpha + nm)\Gamma(\frac{\alpha}{m})$ مقدار A را مشخص کنید.

پ) در مورد استقلال و یا وابستگی خطی توابع $J_p(x)$ و $J_{-p}(x)$ چه می‌توان گفت.

ت) جواب معادله $\frac{d^2y}{d\theta^2} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{dy}{d\theta} + v(v+1)y = 0$ را بیابید.

امتحان پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۸۳/۱۰/۲۱ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱ـ نشان دهید $x=0$ یک نقطه منفرد منظم برای معادله زیر است و سپس معادله را حل کنید.

$$x^2(x+1)y''+x(x-4)y'+4y=0$$

۲ـ مطلوب است:

الف ـ $\int x^3 J_1(x)dx$

ب ـ به ازای مقادیر مختلف n انتگرال زیر را ارزیابی کنید.

$$\int_{-1}^{1}(x^3-2x+1)P_n(x)dx$$

۳ـ جواب عمومی معادله زیر را بنویسید.

$$x^2y''-3xy'+(36x^6-5)y=0 \quad , \quad y=x^2u \quad , \quad z=2x^3$$

۴ـ تبدیل لاپلاس، $f(t)=te^{3t}\int_0^t e^{-2t}\frac{\sin 3t}{t}dt$ را بنویسید.

۵ـ تبدیل معکوس توابع زیر را بنویسید:

الف ـ $F(s)=\frac{1}{s(1-e^{-s})}$

ب ـ $F(s)=\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$

۶ـ معادله زیر را حل کنید.

$$y(t)=e^{-t}-2\int_0^t \cos(t-\lambda)y(\lambda)d\lambda$$

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۸۴/۱/۲۸ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱ـ فاکتور انتگرالی برای معادله $y(4x+3y^2)dx+x(2x+5y^3)dy=0$ یافته و سپس آن را حل کنید. (۱۵ نمره)

۲ـ اولاً تحقیق کنید که $y_1=\sin(x^2)$ یک جواب معادله $xy''-y'+4x^3y=0$ است و سپس جواب عمومی معادله غیرهمگن زیر را بیابید. (۱۵ نمره)

$$xy''-y'+4x^3y=\frac{2x^3}{\cos(x^2)}$$

۳ـ پوش مسیرهای قائم دسته منحنی متناظر با معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید. (۱۲ نمره)

$$y=\frac{-x}{y'}+(y')^2$$

(به عبارت دیگر اگر دسته منحنی $f(x,y;c)=0$ متناظر با معادله دیفرانسیل فوق باشد آن‌گاه پوش مسیرهای قائم $f(x,y;c)=0$ را بیابید)

۴ـ جواب عمومی معادله زیر را بیابید. (۱۵ نمره)

$$y''-2y'+y=x^{-1}e^x+\sin(x)$$

۵ـ به سؤالات زیر به طور مختصر و مفید جواب دهید.

۵ـ الف: جواب عمومی و <u>فقط</u> فرم جواب خصوصی معادله زیر را بیابید. (۸ نمره)

$$D^2(D^2+1)^3(D^2+2D+10)^2(D-1)y=$$
$$4x^3+7xe^x+5e^{-x}+2xe^{-x}\cos(3x)+4x\cos(3x)$$

۵ـ ب: در مورد وجود و تعداد فاکتور انتگرال برای معادله $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ چه می‌توان گفت؟ (۳ نمره)

۵ـ پ: با تغییر متغیر مناسب معادله $x^2y''-2y=x\ln(x)$ را به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل کنید. (۳ نمره)

۵ـ ت: ارتباط رونسکین و استقلال خطی را مشخص کنید. (۳ نمره)

۵ـ ث: با تغییر متغیر مناسب معادله $y''' + 3y''y' = 0$ را به یک معادله مرتبه اول تبدیل کنید (حل معادله مرتبه اول لازم نمی‌باشد) (۳ نمره)

۵ـ ج: فقط بگویید چه تغییر متغیری لازم است که معادله زیر به معادله‌ای قابل حل تبدیل شود. (۳ نمره)

$$y' = \left(\frac{x - 2y + 3}{3x - 6y + 2}\right)^2$$

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۸۴/۸/۳۰ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱ـ مسیرهای قائم دسته منحنی $r = c(\sec\theta + \tan\theta)$ را بیابید.

۲ـ فاکتور انتگرالی برای معادله زیر یافته و سپس آن را حل کنید.

$$(y^2 + 2xy + y)dx - (2xy + x^2 - x)dy = 0$$

۳ـ با فرض اینکه $w = y/x$ و $v = x + y$، معادله زیر را حل کنید.

$$(x+y)^2(xdy - ydx) + [y^2 - 2x^2(x+y)^2](dx + dy) = 0$$

۴ـ اگر $y_1 = e^{-x^2}$ یک جواب معادله همگن نظیر معادله زیر باشد، جواب عمومی آن را از روش تغییر پارامترها بیابید.

$$(xD^2 - D - 4x^3)y = 24x^3e^{2x^2}$$

۵ـ با استفاده از تغییر متغیر $z = \sin x$ معادله زیر را به یک معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل کرده و سپس آن را حل کنید (جواب خصوصی معادله غیرهمگن را از روش اپراتور معکوس بیابید).

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cos x + \frac{dy}{dx}\sin x - y\cos^3 x = 2\cos^5 x$$

۶ـ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}(2D+1)y_1 + Dy_2 = x\\(D-1)y_1 + Dy_2 = 2\end{cases}$$

امتحان پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۸۴/۱۰/۲۷ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱ـ نشان دهید ax^4+bx^2+c یک جواب معادله $(1-x^2)y''-2xy'+20y=0$ می‌باشد. ضرایب b و c را به دست آورید اگر (۱۰ نمره)

$$a=\frac{(2\times 4)!}{2^4(4!)^2}$$

۲ـ اگر $y_1=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\dots$ یک جواب معادله $xy''+y'-y=0$ باشد. جواب دوم معادله را به دست آورید و جواب عمومی آن را بنویسید. (۱۰نمره)

۳ـ با استفاده از تغییر متغیر $u^2=4e^x$ فرم جدید معادله $y''+(e^x-n^2)y=0$ را تعیین کرده و سپس به ازای $n=\frac{1}{2}$ جواب عمومی معادله را بنویسید. (۵نمره)

۴ـ الف) با داشتن $\frac{d}{dx}(x^{-\alpha}J_\alpha(x))=-x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$ ، $J_0(0)=1$ و $L[J_0(x)]=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ مطلوب است $L[J_1(x)]$.

ب) مقدار $\int_0^t J_0(t-x)J_0(x)dx$ را به دست آورید. (۱۰ نمره)

۵ـ مطلوب است: (۱۵ نمره)

الف) $L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-1}\cot^{-1}s\right]$

ب) $L\left[te^{2t}\int_0^t e^{-t}\frac{1-\cos(t)}{t}dt\right]$

ج) $\int_0^\infty te^{-2t}\cos 3t\, dt$

۶ـ دستگاه زیر را حل کنید:(۱۰نمره)

$$\begin{cases}2y_1(t)-y_2(t)-y_2'(t)=4(1-e^{-t})\\ 2y_1'(t)+y_2(t)=2(1+3e^{-2t})\end{cases} \quad \text{و} \quad y_1(0)=y_2(0)=0$$

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۸۴/۲/۴ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱ـ مسیرهای قائم دسته منحنی $y^2+x^2=cx$ را بیابید. (۶ نمره)

۲ـ با تغییر متغیرهای $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$، معادله زیر را حل کنید. (۸ نمره)

$$x(xdy-ydx)=\sqrt{x^2+y^2}dy$$

۳ـ اگر $y_1=\tan x$ یک جواب معادله همگن نظیر معادله زیر باشد، جواب عمومی معادله را با روش تغییر پارامترها بیابید. (۱۰ نمره)

$$y''-y'\tan x-y\sec^2 x=2\cos x$$

به سؤالات زیر بطور مختصر و مفید در همین برگه و در جای تعیین‌شده جواب دهید.

الف ـ شرط لازم و کافی برای اینکه معادله $Mdx+Ndy=0$ فاکتور انتگرالی به فرم $\mu(x^2-y^3)$ داشته باشد را بیان کنید. (۳ نمره)

ب ـ اگر y_1 و y_2 جواب‌های معادله $A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=h(x)$ باشد، آنگاه

الف) چه وقت $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2$ نیز جواب معادله می‌باشد.

ب) در مورد y_1-y_2 چه می‌توان گفت. (۲ نمره)

پ ـ معادله دیفرانسیلی را بیابید که $\sinh(x)$ و $\cosh(x)$ جواب‌های آن باشد. (۱ نمره)

ت ـ معادله $x^4y^{(4)}+xy'+y=3x$ را به یک معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل کنید. (۲ نمره)

ث ـ جواب عمومی معادله $D^3(D^2+1)(2D^2-D+1)^2(D^2-1)y=0$ زیر را بیابید. (۲ نمره)

ج ـ فقط فرم جواب خصوصی معادله زیر را بیابید. (۲ نمره)

$$D^4(D^2+D+1)(D^2+1)(D^2-3D+2)y=x^2+\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+xe^{2x}+\cos(x)$$

ج ـ فقط بگویید که تغییر متغیر لازم برای حل این معادلات چه می‌باشد. (۲ نمره)

$$y' = f\left(\frac{x+y}{x-y+1}\right)$$

$$y''\sin(y) + 2yy' = 12$$

$$y' = 3xy^2\sin(x) + y\cos(x)$$

ح ـ فقط یک جواب پایه‌ای برای معادله $(x+2)y'' - (2x+5)y' + 2y = 0$ بیابید. (۱ نمره)

امتحان پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۸۵/۴/۷ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱ـ اگر $y_1 = x^2\left(1 - 4x + \frac{1}{(2!)^2}(4x)^2 - \frac{1}{(3!)^2}(4x)^3 + \cdots\right)$ یک جواب معادله زیر باشد

$$x^2y'' - 3xy' + (4+4x)y = 0$$

الف) یک جواب پایه‌ای دوم برای معادله بیابید. ب) جواب عمومی معادله را بنویسید.

۲ـ فقط به دو مورد جواب دهید.

الف) با استفاده از فرمول زیر ضابطه‌ی $P_2(x)$ را به دست آورید.

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

ب) مطلوب است مقدار $\int_{-1}^{1}(x^3+x)P_n(x)dx$

ج) مطلوب است محاسبه‌ی $\int x^3 J_0(x)dx$

۳ـ با استفاده از تغییر متغیر داده شده معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + x^2y = 0 \quad , \quad y = x^{\frac{1}{2}}u \quad , \quad z = \frac{x^2}{2}$$

۴ـ تبدیل لاپلاس $f(t) = [t]$ را به دست آورید.

۵ـ مطلوب است:

الف) $\mathcal{L}\left[te^{2t}\int_0^t e^{-t}\frac{1-\cos(t)}{t}dt\right]$

ب) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1+se^{-s}}{s^2+1}\right]$

ج) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-2)^{\frac{3}{2}}(s^2+1)}\right]$

۶ـ معادله انتگرال دیفرانسیلی زیر را حل کنید.

$$y'(t) = \sin(t) + \int_0^t y(x)\cos(t-x)dx$$

$$y(0) = 0$$

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۸۵/۸/۳۰ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱ـ مقدار k را طوری تعیین کنید که سهمی‌های $y=c_1x^2+k$، مسیرهای قائم بیضی‌های $x^2+2y^2-y=c_2$ باشند (c_1 و c_2 پارامترهای ثابت دسته منحنی می‌باشند).

۲ـ می‌دانیم که معادله $(2x^2+2y^2+x)dx+(x^2+y^2+y)dy=0$ دارای فاکتور انتگرالی به صورت $\mu(x^2+y^2)$ یا $\mu(x^2-y^2)$ می‌باشد (به عبارت دیگر فاکتور انتگرال تابعی از x^2+y^2 یا y^2-x^2 می‌باشد). جواب عمومی معادله را بیابید.

۳ـ با تغییر متغیر $u=xy$ معادله $y(xy+1)dx+x(1+xy+x^2y^2)dy=0$ را حل کنید.

۴ـ معادله زیر را درنظر بگیرید:

$$xy''-2(x+1)y'+(x+2)y=x^3e^{2x}$$

اگر بدانیم که e^{mx} یک جواب معادله همگن متناظر با معادله فوق باشد، آنگاه m را بیابید و سپس جواب عمومی معادله را بیابید. همچنین جواب خصوصی معادله غیرهمگن و جواب عمومی معادله همگن متناظر را مشخص کنید.

۵ـ فرض کنیم در معادله $y''+f(x)y'+g(x)y=0$، توابع $f(x)$ و $g(x)$ پیوسته باشند و اگر y_1 و y_2 دو جواب این معادله باشند

الف) نشان دهید رونسکین $W(x)$ در معادله زیر صدق می‌کند

$$W'(x)+f(x)W(x)=0$$

ب) با استفاده از قسمت الف نشان دهید که رونسکین یا همه جا صفر است یا در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌باشد.

۶ـ جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

الف) $D^3(D^2+D+1)(D^2+1)^2(D^2-3D+2)y=0$

ب) فقط فرم جواب خصوصی معادله زیر را بیابید.

$$D^3(D^2+D+1)(D^2+1)^2(D^2-3D+2)y=x^2+\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+xe^{2x}+\cos(x)$$

ج) به ازای چه مقادیری از k معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی داده شده جواب غیرصفر دارد.

$$\begin{cases} y''+ky=0 \\ y(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}$$

د) یک معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت و همگن بیابید که e^x و $\sin(2x)$ جواب‌های پایه‌ای آن باشند.

ه) فقط بگویید چه تغییر متغیری لازم است که معادلات زیر به معادله‌ای قابل حل تبدیل شود (حل معادله مرتبه اول لازم نمی‌باشد).

الف) $y'=\sqrt{\dfrac{x-2y+3}{3x-6y+2}}$

ب) $y'''+2y''y'=0$

ج) $y'=3e^xy^3+2xy$

امتحان پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۸۵/۱۱/۴ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱ـ الف) تابع بسل نوع دوم از مرتبه صفر را به دست آورید. $(Y_0(x) = ?)$

ب) فقط فرم کلی تابع بسل نوع دوم از مرتبه یک را بنویسید.

۲ـ الف) نشان دهید $\frac{d}{dx}[J_0(x)] = -J_1(x)$

ب) اگر $\mathcal{L}[J_0(x)] = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ آن‌گاه مطلوب است محاسبه لاپلاس $J_1(ax)$.

۳ـ معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2y'(t) = -y(t) + e^t - \int_0^t e^{t-x} y'(x)dx \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

۴ـ مطلوب است:

الف) $\mathcal{L}(e^{x-|x|}) = ?$

ب) $\mathcal{L}\left[e^{2t}\int_0^t \frac{1}{x}e^{-2x}\sin(3x)dx\right]$

ج) $L^{-1}\left[e^{-\pi s}\frac{1}{(s-1)^2-16}\right] = ?$

د) $\mathcal{L}[\sin(\sqrt{t})] = ?$

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۸۶/۴/۱ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱ـ جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

الف) $4y' + (y'')^2 = 4xy''$ (۷ نمره)

ب) $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$ (۷ نمره)

ج) $(x+1)y' - ylny = (x+1)^2 y$ (۷ نمره)

۲ـ یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول بسازید که جواب آن در بی‌نهایت به ۳ میل کند. (۸ نمره)
(به عبارت دیگر اگر $y(x)$ جواب معادله باشد آن‌گاه $\lim_{x\to\infty} y(x) = 3$)

۳ـ معادله دیفرانسیل $x^2y'' + 2x(x+2)y' + 2(x+1)^2y = 0$ را در نظر بگیرید.

الف) تغییر متغیر $y = ux^n$ را روی معادله اعمال کنید. (۷ نمره)

ب) معادله فوق را حل کنید. (۸ نمره)

۴ـ الف) با تغییر متغیر یا تغییر متغیرهای مناسب معادله $\frac{y'''}{y''} + 3e^{y''}y' = 0$ را به معادله مرتبه اول تبدیل کنید (حل معادله مرتبه اول لازم نمی‌باشد) (۵ نمره)

ب) اگر جواب عمومی معادله $Pdx + Qdy = 0$ به صورت $f(x,y) = c$ باشد، آن‌گاه چه ارتباطی بین P، Q و f وجود دارد. (۴ نمره)

ج) جواب عمومی معادله $D^3(D^2+D+1)(D^2+1)(D^2-3D+2)y = 0$ را بیابید. (۶ نمره)

د) فقط فرم کلی جواب خصوصی معادله زیر را بیابید. (۶ نمره)

$$D^3(D^2+D+1)(D^2+1)(D^2-3D+2)y = x^2 + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + xe^{2x} + \cos(x)$$

ه) در صورت امکان با تغییر متغیر مناسب معادله $(x-1)^3y''' - 2y = xln(x)$ را به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل کنید. (حل معادله لازم نمی‌باشد) (۵ نمره)

امتحان پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل ۸۶/۴/۱۲ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱ـ معادله دیفرانسیل $xy'' + (1+x)y' - y = 0$ را در نظر بگیرید.

الف) جواب عمومی، به صورت سری، حول $x_0 = 1$ را بیابید. (۱۲ نمره)

ب) فقط فرم جواب عموی، به صورت سری، حول $x_0 = 0$ را بیابید. (۱۰ نمره)

۲ـ با استفاده از تغییر متغیر $x = t^3$ معادله $9x^2y'' + 9xy' + x^{2/3}y = 0$ را حل کنید. (۱۵ نمره)

۳ـ تبدیل لاپلاس زیر را محاسبه کنید. (۱۸ نمره)

$$xe^{2x}\int_0^x t^{1/2}\,\frac{\sin(x-t)}{x-t}dt$$

۴ـ تبدیلات زیر را محاسبه کنید.

الف) $\mathcal{L}\Big(|\sin x|\Big) = ?$ (۱۰ نمره)

ب) اگر $F(s) = L\left[\sin(\sqrt{t})\right]$ با توجه به راهنمائی زیر $F(s)$ را بیابید. (۱۵ نمره)

راهنمایی:

تابع $\sin(\sqrt{t})$ یک جواب خصوصی $4ty''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$ می‌باشد و $F(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-1/4}$

۵ـ مطلوب است حل معادله انتگرالی زیر (۱۰ نمره)

$$y(t) = \sin(t) - \int_0^1 \cos x\, y'(t-x)dx,\ y(0) = 0$$

۶ـ معادله $\begin{cases} 2y'' + y' + 2y = g(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ را حل کنید به طوری که $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 20 \\ 1, & 5 \leqslant x \leqslant 20 \\ 0, & x > 20 \end{cases}$

(۲۰ نمره)

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل ۸۶/۱/۲۱ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱. معادله $Mdx + Ndy = yf_1(xy)dx + xf_2(xy)dy = 0$ را در نظر بگیرید.

الف) اگر $xM - yN \neq 0$ آنگاه نشان دهید که $\frac{1}{xM - yN}$ یک فاکتور انتگرال برای معادله می‌باشد.

ب) اگر $xM - yN = 0$ آنگاه در مورد روش حل معادله چه می‌توان گفت؟

ج) با استفاده از قسمت قبل معادله زیر را حل کنید.

$$x(x^2y^2 + 2)dx + x(2 - x^2y^2)dy = 0$$

۲. با استفاده از تغییر متغیر $y = u^a$ معادلهٔ $(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0$ را به معادلهٔ همگن تبدیل کنید و سپس آن را حل کنید.

۳. فقط بگوئید چه تغییر متغیری لازم است که معادلات زیر به معادله‌ای قابل حل تبدیل شود (حل معادله مرتبه اول لازم نمی‌باشد).

الف) $y' = \sqrt{\dfrac{x - 2y + 3}{3x - 6y}}$

ب) $y'\sin(2y) + \sin^2 y + \sin(x) = 0$

ج) $y' = \sin(x)y + \cos(x)e^x y^3$

۴.

الف) معادله دیفرانسیل متناظر با دسته منحنی $y = cx - \frac{1}{4}c^2$ را بیابید.

ب) آیا معادله دیفرانسیل حاصل از قسمت (الف) دارای جواب غیرعادی می‌باشد یا خیر. در صورت مثبت بودن جواب آن را به دست آورید و در غیر این صورت استدلال کنید.

ج) مسیرهای قائم دسته منحنی قسمت (الف) را بیابید.

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل ۸۶/۱۰/۲۶ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱. اگر معادلات

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 30y = 0$$

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 42y = 0$$

به ترتیب دارای جوابهای y_1 و y_2 باشند مطلوب است محاسبهٔ

الف) $\int_{-1}^{1} y_1^2\,dx$ ب) $\int_{-1}^{1} y_1 y_2\,dx$

۲. در معادله $2(x-3)^2 xy'' + 3xy' + (x-3)y = 0$ نقاط معمولی، منفرد منظم و نامنظم را مشخص کنید و سپس ریشه‌های معادله شاخص را تعیین و جواب اول معادله را به دست آورید و فقط فرم جواب دوم آن را بنویسید.

۳. با استفاده از تغییر متغیر داده شده معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + 2x^2 y = 0,\quad y = x^{\frac{1}{2}}u,\quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$$

۴. با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید.

$$t\frac{d^2y}{dt^2} - (t+2)\frac{dy}{dt} + 3y - t + 1 = 0,\quad y(0) = 0$$

۵. الف) نشان دهید

$$L\left[\sin t \sin ht\right] = \frac{2s}{s^4+4}$$

ب) مطلوب است محاسبهٔ

$$L^{-1}\left[e^{-\pi s}\frac{1}{(s-1)^4-16}\right]$$

۶. معادله انتگرال زیر را حل کنید.

$$y(t) = te^{-t} + \int_0^t xy(t-x)e^{-x}\,dx$$

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل ۸۷٫۱٫۱۸   دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$4(x-2)^2 y' = (x+y-1)^2$$

۲. مسیرهای قائم دسته منحنی $y^2 = cx^3 + x^2 - 1$ را به دست آورید.

۳. با استفاده از تغییر متغیرهای $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ معادله زیر را حل کنید.

$$(x^2+y^2)(xdx+ydy) + (x^2+y^2+2x+2y)(ydx-xdy) = 0$$

جدول تبدیل لاپلاس

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!},\quad 0! = 1$	$\frac{1}{s^n}\quad n = 1,2,3,\dots$
$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{s^n}\quad n > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!},\quad 0! = 1$	$\frac{1}{(s-a)^n}\quad n = 1,2,3,\dots$
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{(s-a)^n}\quad a > 0$
$\frac{\sin at}{a}$	$\frac{1}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\frac{e^{bt}\sin at}{a}$	$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$
$a^{bt}\cos at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
$\frac{\text{sinhat}}{a}$	$\frac{1}{s^2-a^2}$
coshat	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\frac{e^{bt}\text{sinhat}}{a}$	$\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$e^{bt}\cosh at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$
$\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$ $a \neq b$
$\frac{be^{bt}-ae^{at}}{b-a}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$ $a \neq b$
$\frac{\sin at - at\cos at}{2a^3}$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{t\sin at}{2a}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{\sin at + at\cos at}{2a}$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\cos at - \frac{1}{2}at\sin at$	$\frac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$
$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{at\cosh at - \sinh at}{2a^3}$	$\frac{1}{(s^2-a^2)^2}$
$\frac{t\sinh at}{2a}$	$\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$
$\frac{\sinh at + at\cosh at}{2a}$	$\frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$
$\cosh at + \frac{1}{2}at\sinh at$	$\frac{s^3}{(s^2-a^2)^2}$
$t\cosh at$	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$
$\frac{(3-a^2t^2)\sin at - 3at\cos at}{8a^5}$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^3}$
$\frac{t\sin at - at^2\cos at}{8a^3}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^3}$
$\frac{(1+a^2t^2)\sin at - at\cos at}{8a^3}$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^3}$
$\frac{3t\sin at + at^2\cos at}{8a}$	$\frac{s^3}{(s^2+a^2)^3}$

$f(t)$	$F(s)$
$\frac{(3-a^2t^2)\sin at + 5at\cos at}{8a}$	$\frac{s^4}{(s^2+a^2)^3}$
$\frac{(s-a^2t^2)\cos at - 7at\sin at}{8}$	$\frac{s^5}{(s^2+a^2)^3}$
$\frac{t^2\sin at}{2a}$	$\frac{3s^2-a^2}{(s^2+a^2)^3}$
$\frac{1}{2}t^2\cos at$	$\frac{s^3-3a^2s}{(s^2+a^2)^3}$
$\frac{1}{6}t^3\cos at$	$\frac{s^4-6a^2s^2+a^4}{(s^2+a^2)^4}$
$\frac{t^3\sin at}{24a}$	$\frac{s^3-a^2s}{(s^2+a^2)^4}$
$\frac{(3+a^2t^2)\sinh at - 3at\cosh at}{8a^5}$	$\frac{1}{(s^2-a^2)^3}$
$\frac{at^2\cosh at - t\sinh at}{8a^3}$	$\frac{s}{(s^2-a^2)^3}$
$\frac{at\cosh at + (a^2t^2-1)\sinh at}{8a^3}$	$\frac{s^2}{(s^2-a^2)^3}$
$\frac{e^{at/2}}{3a^2}\left\{\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2} - \cos\frac{\sqrt{3}at}{2} + e^{-3at/2}\right\}$	$\frac{1}{s^3+a^3}$
$\frac{e^{at/2}}{3a}\left\{\cos\frac{\sqrt{3}at}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2} - e^{-3at/2}\right\}$	$\frac{s}{s^3+a^3}$
$\frac{e^{-at/2}}{3a^2}\left\{e^{3at/2} - \cos\frac{\sqrt{3}at}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2}\right\}$	$\frac{1}{s^3-a^3}$
$\frac{e^{-at/2}}{3a}\left\{\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2} - \cos\frac{\sqrt{3}at}{2} + e^{3at/2}\right\}$	$\frac{s}{s^3-a^3}$
$\frac{1}{4a^3}(\sin at\cosh at - \cos at\sinh at)$	$\frac{1}{s^4+4a^4}$
$\frac{\sin at\sinh at}{2a^2}$	$\frac{s}{s^4+4a^4}$
$\frac{1}{2a^3}(\cosh at - \cos at)$	$\frac{s}{s^4-a^4}$

$f(t)$	$F(s)$
$J_{۰}(at)$	$\frac{۱}{\sqrt{s^{۲}+a^{۲}}}$
$I_{۰}(at)$	$\frac{۱}{\sqrt{s^{۲}-a^{۲}}}$
$a^{n}J_{n}(at)$	$\frac{(\sqrt{s^{۲}+a^{۲}}-s)^{n}}{\sqrt{s^{۲}+a^{۲}}} \quad n>-۱$
$a^{n}I_{n}(at)$	$\frac{(s-\sqrt{s^{۲}-a^{۲}})^{n}}{\sqrt{s^{۲}-a^{۲}}} \quad n>-۱$
$J_{۰}(a\sqrt{t(t+۲b)})$	$\frac{e^{bts}-\sqrt{s^{۲}+a^{۲}}}{\sqrt{s^{۲}+a^{۲}}}$
$\begin{cases} J_{۰}(a\sqrt{t^{۲}-b^{۲}}) & t>b \\ ۰ & t<b \end{cases}$	$\frac{e^{-b}\sqrt{s^{۲}+a^{۲}}}{\sqrt{s^{۲}+a^{۲}}}$
$\frac{tJ_{۱}(at)}{a}$	$\frac{۱}{(s^{۲}+a^{۲})^{۳/۲}}$
$tJ_{۰}(at)$	$\frac{s}{(s^{۲}+a^{۲})^{۳/۲}}$
$J_{۰}(at)-atJ_{۱}(at)$	$\frac{s^{۲}}{(s^{۲}+a^{۲})^{۳/۲}}$
$\frac{tI_{۱}(at)}{a}$	$\frac{۱}{(s^{۲}-a^{۲})^{۳/۲}}$
$tI_{۰}(at)$	$\frac{s}{(s^{۲}-a^{۲})^{۳/۲}}$
$\frac{\cos ۲\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$
$N(t) = null\ function$	۰
$\delta(t)$	۱
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u_{a}(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$